Ambito
Scientifico

SAGGIO CRITICO SUL LIBRO CLASSICAL THEORY OF ELECTROMAGNETISM di Baldassare Di Bartolo

ANTONINO GENTILE

Sommario

Saggio critico sul libro del Prof.B.Di Bartolo: Classical Theory Of Elecromagnetism - 2004 - World Scientific. Un corpus di costrutti teorici e tecniche di calcolo che sono tanta, indinspensabile parte delle conoscenze di ogni studioso ricercatore nel duplice campo della fisca teorica e sperimentale.

> La vera difficoltà dipende dal fatto che la fisica è una sorta di metafisica: la fisica descrive la **realtà**. Ora, noi non sappiamo cosa sia la **realtà**, ma la conosciamo solamente attraverso la descrizione che ne dà la fisica.
> **A.Einstein**

L'autore di questo libro è il Prof.B.Di Bartolo[1], un nostro concittadino, che insegna fisica, negli USA, al Boston College. Un libro che nasce dalla sua ricca esperienza didattica e da una lunga frequentazione dell'elettromagnetismo pratico e teorico. Si tratta di una sfida, cui l'autore si è consapevolmente sottoposto e, come la prefazione segnala, per dare in un singolo volume una coerente rappresentazione della teoria elettromagnetica che da Faraday in poi ha impegnato tante generazioni di fisici teorici e sperimentali fino ai giorni nostri. E' dunque questo un testo di elettromagnetismo per studenti laureati in fisica, ma che può e deve essere usato anche come manuale di consultazione per ogni cultore di questa disciplina ed ogni insegnante di fisica indipendentemente dal tipo di insegnamento elementare o universitario o professionalizzante nelle discipline tecniche che fanno largo uso dell'elettromagnetismo e, last but not least, dai ricercatori stessi. Tutte queste categorie vi troverranno idee e risposte ai loro dubbi e ai loro assillanti quesiti che come ben sappiamo tormentano le menti capaci di pensare. E' appunto un libro ricco di teoria e di multiformi esempi per queste menti che, come opportunamente dice l'autore nella prefazione, hanno l'abitus dello studente che considera il suo **tempo proprio** come **XUEXI SHIBAO**.[2] Come in una grande partitura musicale il testo si dipana attraverso dodici pezzi in un crescendo dove si innalza il maestoso edificio dell'elettromagnetismo classico e un manuale in cui, opportunamente, si danno ragionate soluzioni di una buona metà degli esercizi proposti alla fine di ogni capitolo. Un libro in cui l'uso massiccio della matematica, quale strumento di indagine, non offusca il pensiero fisico fondamentale per la comprensione dei fenomeni elettromagnetici. C'è tutta la visione classica del mondo fisico dove la materia è costituita di **particelle** mentre le interazioni gravitazionali ed elettromagnetiche sono descitte da **campi**. Le particelle sono oggetti localizzati la cui dinamica è governata dalle equazioni di Newton nel caso non relativistico e da quelle di Minkovski nella relatività ristretta. Abbiamo quindi leggi orarie e linee d'universo. I campi, invece, sono enti fisici delocalizzati in una regione finita od infinita dello spazio. Come le particelle, possiedono **energia**, **inpulso** e

[1] Ulteriori informazioni sule pubblicazioni, anche letterarie, dell'autore si possono reperire nel sito < `http://www.physics.bc.edu/Deptsite/people_new/dibartolo.shtml`>

[2] Frase cinese che possiamo tradurre con 'Tempi di Studio'

momento angolare e l'autore efficamente lo documenta. Esiste dunque un dualismo ontologico che chiaramente si manifesta nel termine ibrido di interazione che accoppia due oggetti sostanzialmente differenti: la linea d'universo e il potenziale elettromagnetico.[3] Il primo capitolo fornisce le caratteristiche dei principali oggetti matematici e dei teoremi, in $\mathbf{R}^3$, di cui si fa largo uso nell'eletromagnetismo classico.Quindi si introduce l'esperto lettore nella incombente costruzione del grandioso edificio della teoria elettromagnetica con i suoi campi e le sue cariche, puntiformi o distribuite con continuità sui corpi, ferme nel solito RI[4]. Giusto risalto viene dato al grande **principio di sovrapposizione** che domina la fisica classica e quantistica[5] dato il mondo lineare in cui i costrutti teorici $\vec{E}, \vec{B}, \Phi(\vec{x}) \ldots$ vivono. E poi introdotta la **distribuzione** $\delta(\vec{x})$, un'invenzione dei fisici (Dirac), poi matematicamente sistemata da L.Schwartz, che permette di trattare i tanti puntiformi oggetti di cui la fisica teorica parla. Trattando poi del campo elettrostatico nella materia ovvero del fenomeno della polarizzazione viene alla ribalta il **dipolo matematico**: un'idea simile a quella utilizzata da Feynman per spiegare lo spin dell'elettrone. Lo spin di una particella puntiforme (senza struttura interna), come l'elettrone, può intendersi come il prodotto del momento d'inerzia I per la velocità angolare ω con la condizione che $I \to 0$ and $\omega \to \infty$. Il prodotto rimane tuttavia costante[6]. Il dipolo matematico si rivela un utile concetto che l'autore utilizza per trattare il classico fenomeno della polarizzazione dei dielettrici. Si trattono poi le correnti stazionarie e la magnetostatica. Oltre alle elementari leggi incontrate a scuola, facciamo conoscenza con il potenziale vettore ed il tensore degli sforzi. Oggetti assai utili per descivere gli effetti dei campi magnetici sulla materia. Il potenziale vettore gioca anche un ruolo molto rilevante nella meccanica quantistica. Esso nasce dal fatto che la forza di Lorentz, pur facendo lavoro nullo su una carica in moto, non è conservativa. Non c'è quindi un potenziale scalare. C'è poi la vexata questio dei campi $\vec{B}$ e $\vec{H}$, $\vec{E}$ e $\vec{D}$, su cui nella letteratura non c'è consenso nemmeno nella terminologia oltre che nelle unità di misura. Ritengo che la tendenza che si affermerà, riguarderà $\vec{E}$ e $\vec{B}$ come gli autentici campi elettrici e magnetici. $\vec{D}$ e $\vec{H}$ vettori ausiliari introdotti per comodità[7], come appa-

[3] nella teoria quantistica dei campi (QFT) la materia e la radiazione sono trattate alla stessa maniera e sono descritte da campi quantistici

[4] RI = Riferimento inerziale

[5] Il principio di sovrapposizione, in ambito quantistico, ha una interpretazione assai diversa da quella classica. Si consulti a tal proposito l'aureo libretto di G.C. Ghirardi: 'Un occhiata alle carte di Dio' - ilSaggiatore

[6] Il modulo dello spin è $S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$ è una proprietà specifica ed immutabile dell'elettrone.

[7] E' la posizione di Feynman nel II volume, parte II, delle sue celebri lezioni di fisica.

rente semplificazione delle equazioni di Maxwell, nella materia polarizzata o magnetizzata. Il nostro autore si attiene invece alla vecchia denominazione di $\vec{B}$ come campo di induzione magnetica. Il quarto capitolo tratta delle diverse formulazioni della grande legge dell'induzione elettromagnetica e la fenomenologia della quasi-stazionarietà caratterizzata dall'intreccio di tre fattori: la geometria del sistema, la frequenza delle correnti, l'onnipresente velocità c. L'induttanza, nella sua duplice veste, viene illustrata abbastanza diffusamente negli ultimi paragrafi del capitolo dove c'è anche un'opportuna chiarificazione sulle unità di misura. Nel capitolo seguente inizia una generale discussione dele equazioni di Maxwell presentate in forma assiomatica. Vogliamo ricavarle partento dalla legge di Coulomb che, in forma differenziale, assume la forma[8]: $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ (1) ed il principio di conservazione *locale* della carica elettrica $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (2). Da queste due fatti è facile ricavare subito tre delle quattro equazioni di Maxwell. Infatti, derivando la (1) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

da cui segue

$$\nabla \cdot \left(4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4\pi \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \wedge \vec{B}$$

ed anche

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Non sappiamo però, per il momento, quale significato fisico abbia il vettore $\vec{B}$. Per trovare la quarta equazione, dal momento che le onde elettromagnetiche hanno velocità c nei riferimenti inerziali, imponiamo che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ubbidiscano ad un equazione inomogenea delle onde dove il termine sorgente è funzione soltanto di ρ e $\vec{J}$.

Le celeberrime equazioni delle onde, in forma d'alembertiana non omogenea, sono:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = f_1(\rho, \vec{J})$$
$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = f_2(\rho, \vec{J})$$

Facendo uso dell'identità vettoriale

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E})$$

[8]Si usano le unità gaussiane.

ne segue che

$$
\begin{aligned}
\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{E}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= f_1 \\
4\pi\nabla\rho - \nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{E}) - \frac{1}{c^2}\left[\nabla\wedge\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) + 4\pi\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\right] &= f_1 \\
\nabla\wedge\left(\nabla\wedge\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) &= 4\pi\nabla\rho + \frac{\partial\vec{J}}{\partial t} - f_1
\end{aligned}
$$

Il II membro dell'ultima relazione non contiene i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$, ergo il I membro deve essere nullo. Quindi

$$
\nabla\wedge\left(\nabla\wedge\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\nabla\wedge\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla f}
$$

dove f è una funzione scalare. Analogamente possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
\nabla(\nabla\cdot\vec{B}) - \nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{B}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} &= f_2 \\
\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{B}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} + f_2 &= 0 \\
\nabla\wedge\left(4\pi\vec{J} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} + f_2 &= 0
\end{aligned}
$$

L'ulima relazione possiamo riscriverla come

$$
4\pi\nabla\wedge\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\wedge\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) + f_2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\wedge\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -4\pi\nabla\wedge\vec{J} - f_2
$$

ed allora come sopra

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\wedge\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = 0
$$

Dunque $\nabla\wedge\vec{E} + 1/c^2\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ oltre ad essere il gradiente di uno scalare non dipende dal tempo. Imponendo poi che f si annulli all'infinito, ricaviamo $f = 0$. Ritroviamo in questo modo anche la quarta equazione! Ma quale il significato fisico di $\vec{B}$? Significato che si svela operando con le tre grandezze, di cui il testo diffusamente parla, quali **la densità di energia**, **il vettore**

di Poynting e **il tensore di Maxwell** e verificando che la densità di forza $\vec{\mathcal{F}}$ ha l'espressione

$$\vec{\mathcal{F}} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{J} \wedge \vec{B}$$

Un importante distinzione va fatta tra le quattro equazioni. Sono vere equazioni del moto soltante le due che contengono le derivate temporali dei campi. Le altre esprimono invece dei vincoli che riducono i gradi di libertà effettivi del sistema. Ci sono allora due modi di procedere: se si vuole conservare la **covarianza** si devono considerare tutte le variabili anche quelle non dinamiche, altrimenti si lavora privilegiando **un particolare sistema di riferimento**. Dipende quindi dall'obiettivo perseguito che può riguardare la soluzione delle equazioni del moto in una particolare configurazione, un calcolo di osservabili o la quantizzazione dei campi ecc. La pregevole trattazione delle equazioni tocca anche i potenziali elettromagnetici e le onde stesse nel vuoto e nella materia e gli onnipresenti fenomeni della riflessione e della rifrazione che fin dall'antichità hanno attirato l'attenzione dei cultori della filosofia della natura, come un tempo venva chiamata la fisica. In questo capitolo, dopo i corposi calcoli che portano ai potenziali di Liénard-Wiechert e quindi ai campi, quì riscritti in notazione più sintetica di quella utilizzata dall'autore, come

$$\vec{E}(\vec{x},t) = q\left[\frac{(1-\beta^2)(\vec{n}-\vec{\beta})}{r^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\right]_{\text{rit}} + \frac{q}{c}\left[\frac{\vec{n}\wedge[(\vec{n}-\vec{\beta})\wedge\dot{\vec{\beta}}}{r(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\right]_{\text{rit}} \qquad \left(\vec{n}\equiv\frac{\vec{r}}{r}\right)$$
$$\vec{B}(\vec{x},t) = \left[\vec{n}\wedge\vec{E}(\vec{x},t)\right]_{\text{rit}}$$

Abbiamo i campi di velocità e i campi di accelerazione come il Di Bartolo ci ricorda, con didattica pazienza, dopo i voluminosi calcoli. L'uso di queste formule ci permette di fare qulche osservazione. Il terzo principio della dinamica non vale nell'elettromagnetismo: infatti consideriamo due particelle di carica q_1 e q_2 in moto, in un RI, con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. La forza F_{12} che la particella di carica q_2 esercita sulla particella di carica q_1 è

$$\vec{F}_{12}(t) = q_1\vec{E}(x_1,t) + \frac{q_1}{c}\vec{v}_1(t)\wedge\vec{B}(x_1,t)$$

dove $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono i campi gnerati dalla carica q_2 nel punto in cui si trova la carica q_1 all'istante t. sostituendo le formule per i campi si trova che

$$\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{21}$$

con ovvio significato dei simboli. Si potrebbe pensare di costruire tutto l'elettromagnetismo assumendo come base di partenza l'espressione della forza tra due cariche in moto, tralasciando il paradigma dei campi. Qualcuno ha pure tentato questa via[9], ma data l' estrema farragginosità delle procedure, l'oblio è rapidamente calato su siffatta linea di pensiero. Poi viene trattato in maniera assai esauriente il classico problema dell'irraggiamento delle cariche in moto, more solito, in un RI fino al caso ultrarelativistico ($\beta \to 1$) dove la quinta potenza al denominatore della formula (8.4.20) fa sì che l'emissione sia rilevante solo per piccoli valori dell'angolo formato da $\vec{v}$ e dalla direzione rivelatore-carica. Alcuni buoni elementari esempi chiarificano i concetti e le tecniche esposte. Il capitolo si conclude con un attenta disamina della radiazione di sincrotrone dove sono riportate anche le conclusioni dell'analisi di Schwinger sullo spettro della radiazione. Una segnalzione utile per gli studiosi: il campo elettromagnetico $F^{ab}(x_j)$ prodotto da una carica in moto vario in un RI, si può ottenere in modo fisicamente più trasparente come documenta il recente articolo di Hamas Padmanabhan pubblicato nell' Am.J.Phys. 77(2), del febbraio 2009. E' anche utile conoscere la formula di Feynman[10] che ci dà il campo elettrico generato da una carica in modo arbitrario:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = q\left[\frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{R}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right)\right]_{\text{rit}}$$

dove $\vec{R}(t_{\text{rit}}) = \vec{x} - z(t_{\text{rit}})$ e $z(t_{\text{rit}})$ è la posizione della carica al tempo ritardato. Formula che Feynman affermò essere assai utile sia nell'uso didattico che nella spiegazione della radiazione di sincrotrone. Inoltre giova pure ricordare un celebre paradosso che ha attirato l'attenzione dei fisici in anni non troppo lontani: una carica è sottoposta ad un'accelerazione costante $\vec{g}$ rispetto al Rif. terrestre, quindi irraggia. Ma se analizziamo la carica in un Rif. accelerato, in cui è ferma, allora non irraggia. Che farà la carica? La risposta afferma che: nel RIF. Terra, asintoticamente lorentziano, la carica in caduta libera **irraggia**. Invece il RIF. in caduta libera, *localmente* inerziale, non è sufficiente per studiare il problema dell'irragiamento di una carica accelerata in quanto occorre considerare il comportamento asintotico del campo e.m. a grande distanza. Così il paradossale dilemma trova la sua risoluzione. Le equazioni di Maxwell e quelle di Minkowski sono equazioni accoppiate. I campi governano il moto delle cariche, e queste irraggiando, modificano i campi che quindi retroagiscono su se stessi. L'effetto della radiazione sul

[9]Una teoria elettromagnetica covariante basata sull'interazione adistanza tra cariche, invece che sull'interazione tra cariche e campi, è stata sviluppata da Wheeler e Feynman. Vedi Rev.Mod.Phys., 17,1945; 21,1949.

[10]Una giustificazione di questa relazione, data da J.Heberle, la si può trovare nel Giornale di Fisica, numero 25, anno 1984.

moto delle particelle cariche è la cosiddetta **reazione di radiazione**. In un certo numero di casi questo effetto è piccolo e può essere trascurato. Quanto piccolo da potersi trascurare? Se l'energia della radiazione è molto minore dell'energia della particella

$$U_{\mathrm{rad}} << U_{\mathrm{part}}$$

L'energia che una particella di massa m e carica q e accelerazione a irraggia in un tempo T è circa

$$U \sim \frac{2q^2a^2}{3c^3}T$$

mentre una particella che oscilli con periodo T e ampiezza d ha energia dell'ordine

$$U_{\mathrm{part}} \sim \frac{md^2}{T^2}$$

Allora

$$\frac{2q^2d^2}{3c^3T^4}T << \frac{md^2}{T^2} \Longrightarrow T >> \frac{2q^2}{3mc^3}$$

avendo posto $a \sim d/T^2$. La quantità $\tau_c = \dfrac{2q^2}{3mc^3}$ è detta *tempo caratteristico* e per un elettrone vale $\tau_c = 6,3 \cdot 10^{-24}\, s$. Gli effetti dell'irraggiamento possono essere ignorati quando la scala temporale del moto particellare è molto più grande di τ_c. L'autore, opportunamente, analizza il caso delle oscillazioni forzate in cui la reazione di radiazione non può essere trascurata. Si tratta problema non da poco che l'autore, nel cap.9, affronta nella sua generalità, in $\mathbf{R}^3$, seguendo la linea di pensiero di Abraham e Lorentz[11]. Si può pervenire allo stesso risultato, cioè all'equazione di Abraham-Lorentz, con un ragionamento euristico. Se la particella carica irradia. perde energia. L'effetto di questa perdita possiamo descriverlo introducendo nell'equazione newtoniana del moto una **forza di reazione radiativa** F_{reaz}

$$m\ddot{x} = F_{\mathrm{est}} + F_{\mathrm{reaz}}$$

Determineremo F_{reaz} imponendo che il lavoro che questa forza compie in un intervallo di tempo $t_2 - t_1$ sia uguale, in valore assoluto, all'energia irradiata . Quindi

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{\mathrm{reaz}}\dot{x}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{2q^2}{3c^3}\ddot{x}^2\, dt$$

[11] L'estensione relativistica, in M, si deve a Dirac, che la ricavò utilizzando le equazioni covarianti dell'elettrodinamica e la legge di conservazione del quadrimomento.

Integrando per parti il secondo membro si ottiene

$$-\frac{2q^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2} = -\frac{2q^2}{3c^3}\ddot{x}\dot{x}\Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2q^2}{3c^3}\int_{t_1}^{t_2}\dddot{x}\,\dot{x}\,dt$$

Se il moto è di tipo oscillatorio e $t_2 - t_1$ è un multiplo intero del periodo, il termine integrato si annulla. Allora

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(F_{reaz} - \frac{2q^2}{3c^3}\dddot{x}\right)\dot{x}\,dt = 0 \Longrightarrow F_{reaz} = \frac{2q^2}{3c^3}\dddot{x}$$

Quindi abbiamo l'equazione A-L (Abraham-Lorentz)

$$m\ddot{x} = F_{est} + \frac{2q^2}{3c^3}\dddot{x}$$

L'equazione contiene un inusuale derivata terza delle coordinate. Le soluzioni non sono quindi determinate in funzione della posizione e della velocità iniziali. Nel caso in cui $F_{\text{est}} = 0$, l'equazione ammette oltre alla soluzione $\ddot{x} = 0$ anche la soluzione di fuga che il testo chiama '**runway solution**'. Bisogna allora porre una condizione addizionale sull'accelerazione. La condizione è:

$$\boxed{\ddot{x} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0}$$

Il testo ricava una completa versione del'equazione A-L. Nella massa (9.2.29) compare il fattore $\frac{4}{3}$ invece del numero 1 come è nella formula di Einstein $E = mc^2$.[12]. L'anomalo coefficente è dovuto alla trattazione non relativistica come dimostrò Fermi in uno dei suoi giovanili lavori.[13]. Ma c'è di più! Per una carica puntiforme, come è la nostra attuale immagina dell'elettrone, l'autoenergia $U = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r_0}$ diverge nel punto stesso in cui si trova la carica. Anche la teoria covariante soffre lo stesso problema che viene aggirato con una ambigua procedura nota come rinormalizzazione della massa. Ma, come sappiamo, la fisica patisce la sindrome dell'infinito.[14] Negli ultimi paragrafi delo stesso capitolo si parla della diffusione della radiazione da Rayleigh a Thompson. Diffusione che ci permette di rispondere anche alle classiche domande: perché il cielo è azzurro, le nuvole sono bianche ed i tramonti rossi? Quale l'origine dei colori che vediamo? Il classico modello dell'elettrone

[12]Ricordiamoci che $E = mc^2$ è valida solo in un Rif. inerziale in cui l'oggetto è fermo. Altrimenti si scrive $E = \gamma mc^2$

[13]E.Fermi, Note e memorie, Accademia nazionale dei Lincei, Roma 1962

[14]Si pensi alle procedure di rinormalizzazine di uso corrente nella QED e in altre teorie di campo.

soggetto ad una forza elastica che è molto lontano dalla realtà, tuttavia permette di dare giuste risposte allle domande sul cielo, le nuvole, i tramonti ed il variegato mondo dei colori[15]. Vediamo le cose per un oscillazione, non risonante, inferiore a $10^{-17}\,m$, degli elettroni degli atomi e delle molecole che diffondono la radiazione incidente. Meno del 1% del raggio del nucleo di un atomo. La matematica utile per intendere il comportamento radiativo dei dipoli, quadrupoli, multipoli è sviluppata in profondità, con la consueta chiarezza, in questo capitolo dove si incontrano personaggi assai interesanti della fisica matematica quali le armoniche sferiche e i polinomi di Legendre e le funzioni di Bessel. Opportuni esempi sulle emissioni da dipolo e quadrupolo concludono il capitolo. Nell'undicesimo capitolo si introduce con chiarezza la formulazione lagrangiana ed hamiltoniana, in $\mathbf{R}^3$, dell'elettromagnetismo e l'uso delle parentesi di Poisson in questo contesto. La lagrangiana è la più importante funzione scalare di tutta la fisica teorica. Infatti la dinamica di un generico **campo** $\phi(x)$, definito nel continuo spazio-temporale $\mathbf{M}$, è descritta da un azione S del tipo

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \delta_\mu\phi, x_\mu)\; d^4x$$

dove $\mathcal{L}$ indica la densità di lagrangiana che nella letteratura della QFT viene chiamata semplicemente lagrangiana. Il principio di Hamilton stabilisce poi che la *vera* configurazione del campo è quella che rende estremo l'integrale suscritto. Un interessante considerazione nel par.11.3 ci informa dell'invarianza di gauge nella lagrangiana $L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - e\phi$. La presenza dei potenziali elettromagnetici in questa lagrangiana potrebbe far pensare che l'invarianza non sussista dal momento che L cambia per una trasformazione di gauge. Non è così, infatti

$$\begin{aligned} L \to L' &= -mc^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A}') - e\phi' \\ &= L + \frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{c}\vec{v}\cdot\nabla f = L + \frac{e}{c}\frac{df}{dt} \end{aligned}$$

L' differisce da L solo per una derivata totale[16]. Pur essendo diverse L e L' generano le stesse equazioni del moto: il sistema particella-campo è dunque invariante rispetto a trasformazioni di gauge. Infine nella formula (11.4.22) c'è un errore di stampa. Il vettore $\vec{k}$ va sostituito con il suo modulo. Abbiamo così il numero di gradi di libertà del campo elettromagnetico relativamente

[15] Il successo di questo modello, l'atomo come un insieme di oscillatori armonici, è dovuto al fatto che le equazioni sono lineari e hanno la stessa forma in meccanica quantistica.

[16] Vedi L.D.Landau- E.M.Lifshitz, Meccanica-ed.Boringheri

alle frequenze nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$ dal momento che $dk = \frac{2\pi}{c} d\nu$. Quindi se vogliamo descrivere la stato del campo e.m., nel volume prescelto, come un sistema neccanico, dobbiamo assegnare ampiezza e fase di ciascuna onda istante per istante. Le ampiezze figurano come le coordinate lagrangiane del campo e siccome variano armonicamente, corrispondono a oscillazioni armoniche. Ed è propio questa la linea di pensiero che l'autore efficamente sviluppa. Per la storia dobbiamo dire che subito agli estrosi fisici venne l'idea di applicare a questi oscillatori armonici il teorema di equipartizione dell'energia della meccanica statistica. Si trovò la celeberrima relazione di Rayleigh-Jeans[17] che segna l'irrompere sul proscenio della fisica del problema della catastrofe ultravioletta con la conseguente crisi del paradigma classico. Qualche piccola precisazione tuttavia si impone e riguarda i due capitoli, VI e VII, sulla relatività ristretta: un indispensabile strumento per la trascrizione quadridimensionale dell'elettromagnetismo. Così abbiamo un'immagine profonda e immediata del personaggio primo protagonista di questo libro: **il campo elettromagnetico**. Nella visione quadridimensionale i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ perdono la loro individualità a favore di un singolo tensore di rango due. Un tensore che ha sedici componenti indipendenti. Siccome il tensore è antisimmetrico soltanto sei componenti sono diverse da zero, appunto qelle dei due campi da cui nasce. La matrice rappresentativa del tensore cambia al mutare del RI cosicché conponenti nulle in certo RI possono diventare non nulle in altro RI. L'introduzione del tensore del campo elettromagnetico ha fornito l'immagine mentale più efficace per una vera comprenzione dei campi elettrici e magnetici generati da cariche ferme o in moto in un RI. Il testo, con didattica pignoleria, dà più versioni di questo straordinario tensore le cui componenti sono illustrate nella seguente figura:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}} \\ \multicolumn{2}{c}{F_{\mu\mu} = 0} \\ F_{xy} = -B_x & F_{xt} = E_x \\ F_{yz} = B_x & F_{yt} = E_y \\ F_{zx} = B_y & F_{zt} = E_z \end{array}}$$

Dobbiamo sottolineare comunque che alla relatività dobbiamo

- Una nuova cinematica
- Una nuova dinamica

[17] $u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 K_B T$. u = densità di energia spettrale, K_B = costante di Boltzmann

- Una visione geometrica della gravitazione
- L'immagine di un universo in espansione ed evoluzione

Vengono trattate anche in dettaglio sia la forma generale delle trasformazioni di Lorentz che la ricca fenomenologia collegata a queste trasformazioni. Sono trasformazioni che, nel limite galileano, $v << c$ e $\triangle x << c \triangle t$, cioè a basse velocità e grandi intervalli di tipo tempo, si riducono a

$$\begin{cases} \triangle x' = \triangle x - v \triangle t \\ \triangle t' = \triangle t \end{cases}$$

Curiosamente ci si potrebbe chiedere cosa si trova a basse velocità e grandi intervali di tipo spazio, $v << c$ e $\triangle x >> c \triangle t$. Ebbene si hanno le trasformazioni di Carroll:

$$\begin{cases} \triangle x' = \triangle x \\ \triangle t' = \triangle t - \frac{v}{c^2} \triangle x \end{cases}$$

di puro interesse letterario.[18] Nel cap. VI, a pag. 263, si dice: 'A moving clock is late...'. Sebbene la frase, di comune uso gergale in fisica, compaia in molti libri di relatività, tuttavia ritengo che sarebbe meglio evitarla perché una velocità costante in grandezza e direzione non può influire sul ritmo di un orologio come peraltro risulta dallo stesso principio di relatività. Come Minkowski ci ha insegnato, il tempo proprio di un orologio non è altro che la lunghezza del cammino dell'orologio stesso nello spazio-tempo $\mathbf{M}$[19] dove non vale l'usuale disuguaglianza triangolare dello spazio euclideo. La metrica infatti è del tipo: $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$[20]. Differisce da $\mathbf{R}^4$ solo nel segno relativo della componente temporale e delle componenti spaziali del tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Chi si muove solo nel tempo percorre un cammino più lungo di chi si muove nello spazio-tempo. Anche il paradossso dei gemelli è, in questa cornice spazio-temporale, facilmente spiegabile senza le complicazioni analitiche e concettuali di cui si parla nel paragrafo 6.12 dello stesso capitolo. Sappiamo poi che[21] il principio di relatività di Einstein impone che le leggi della fisica siano covarianti rispetto alle trasformazioni

[18] E' il mondo di Alice nel Paese delle Meraviglie il cui autore è appunto Lewis Carroll.

[19] $\mathbf{M}$ denota lo spazio-tempo quadridimensionale di Minkowski

[20] Il nostro autore, come fanno anche altri, usa una diversa segnatura del tensore metrico ed ottiene: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$

[21] Einstein aveva idee opposte a quelli dei fisici del suo tempo. Pone il principio di relatività come postulato, mentre gli altri fisici lo consideravano un teorema. Lorentz pensava che Einstein ''barasse'' ammettendo come principio ciò che si doveva dimostrare.

di Lorentz. La procedura per stabilire se una certa legge è in accordo con il pricipio di relatività è:

1. Interpretare le trasformazioni di Lorentz come trasformazioni **geometriche**, simili alle rotazioni in uno spazio opportuno, lo **spazio di Minkowski M**.

2. Introdurre in **M** degli oggetti matematici con proprietà di trasformazione definite rispetto alle trsformazioni di Lorentz. Sono i **quadrivettori** e i **quadritensori**.

3. Scrivere le leggi in forma quadridimensionale.

La corrispondenza tra la covarianza rispetto alle rotazioni e la covarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz si può sintetizzare nella seguente tabella

$$\left\{\begin{array}{ccc} \text{spazio euclideo}\,\mathbf{R}^3 & \Longleftrightarrow & \text{spazio-tempo}\,\mathbf{M} \\ \text{rotazioni} & \Longleftrightarrow & \text{trasormazioni di Lorentz} \\ \text{vettori, tensori euclidei} & \Longleftrightarrow & \text{quadrivettori, quadritensori} \end{array}\right\}$$

Nella discussione delle trasformazioni di Lorentz nal par.6.7 si introduce una coordinata temporale immaginaria: $x_4 = ict$. La metrica assume la forma

$$ds^2 = -(dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2 - (dx_4)^2$$

che, a parte l'irrilevante segno complessivo, è la metrica dello spazio euclideo quadridimensionale $\mathbf{R}^4$. Nella teoria quantistica dei campi il tempo immaginario viene chiamato **rotazione di Wick** . E' il trucco dell'euclidizzazione. Ma in relatività se ne può fare a meno. Introducendo il parametro **rapidità**, chiamato η e collegato al parametro $\beta = v/c$ dalla relazione:

$$\eta = \tanh^{-1}\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

si vede come una trasormazione di velocità lungo una direzione x_i[22] rappresenta una rotazione di un angolo immaginario $i\eta$ nel piano x_i, x_4 in **M**. Infatti le trasformazioni assumono la forma

$$\begin{cases} x_1' = -(\sinh\eta)x_4 + (\cosh\eta)x_1 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \\ x_4' = (\cosh\eta)x_4 - (\sinh\eta)x_1 \end{cases}$$

[22] Viene chiamata 'boost' nella letteratura scienifica in lngua inglese.

Dal momento che $\cosh\eta = \cos i\eta$ e $\sinh\eta = -i\sin i\eta$ la trasformazione diventa

$$\begin{cases} x_1' = \sin(i\eta)x_4 + \cos(i\eta)x_1 \\ x_4' = \cos(i\eta)x_4 - \sin(i\eta)x_1 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

formalmente analoga alla rotazione di un angolo $i\eta$ nello spazio euclideo. Anche un elementare, didattica presentazione delle trasformazioni di Lorentz ha un suo forte senso fisico. Si basa su queste idee:

- $y' = y$, $z' = z$
- linearità
- $x' = 0 \rightarrow x = vt$
- $x = 0 \rightarrow x' = vt$
- simmetria
$$\begin{cases} x' = a(x - vt) \\ x = a(x' + vt') \end{cases}$$
- con un lampo di luce emesso nell'istante iniziale dalla comune origine si ha $x = x' = 0$; $t = t' = 0 \rightarrow x = ct$; $x' = ct'$ e quindi
$$\begin{cases} ct' = a(c - v)t \\ ct = a(c + v)t' \end{cases}$$

Moltiplicando m.a.m l'ultimo sistema si ottiene

$$c^2tt' = a^2(c^2 - v^2)tt'$$

e quindi $a = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma =$ il noto fattore lorentziano. Il legame tra t e t' si ottiene facilmente dal sistema che compare al quinto posto nell'elenco delle iniziali ipotesi. In forma matriciale le trasormazioni possano scriversi come

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Stessa situazione per la quaterna $(E/c, p_x, p_y, p_z)$

$$\begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix}$$

Si tratta quindi di trasormazioni lineari, omogenee, **non ortogonali** dal momento che la grandezza invariante non è la distanza euclidea, ma **il tempo proprio**.
Analogo didattico percorso può farsi per la composizione delle velocità che non è additiva come nel caso galileano. Utilizzeremo qiundi il simbolo $\oplus$

$$\begin{cases} v' \oplus v_{\text{rel}} \sim v' + v_{\text{rel}} \\ v',\ v_{\text{rel}} << c \end{cases}$$

Poi $v' \oplus c = c$ e $c \oplus v_{\text{rel}} = c$. possiamo scrivere

$$v' \oplus v_{\text{rel}} = f(v', v_{\text{rel}})(v' + v_{\text{rel}})$$

Bisogna dunque trovare la forma della funzione f: è la correzione necessaria per passare dalla composizione galileana alla composizione relativistica. Essendo

$$\begin{cases} v' \oplus c = c = f(v', c)(v' + c) \\ c \oplus v_{\text{rel}} = c = f(c, v_{\text{rel}})(c + v_{\text{rel}}) \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} f(v', c) = \dfrac{c}{v' + c} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{v'}{c}} \\ f(c, v_{\text{rel}}) = \dfrac{c}{v_{\text{rel}} + c} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{v_{\text{rel}}}{c}} \\ f(v', v_{\text{rel}}) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{v' \cdot v_{\text{rel}}}{c^2}} \end{cases}$$

Il testo ci informa e dimostra che i boost lungo uno stesso asse formano gruppo. La cosa non risulta più vera se si compongono i boost lungo assi con direzioni diverse. Si abbiano tre sistemi di RI in moto relativo uniforme: $\mathcal{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ dove $\mathcal{R}_1$ si muove rispetto a $\mathcal{R}$ con velocità v diettta lungo l'asse x e $\mathcal{R}_2$ si muove rispetto a $\mathcal{R}_1$ con velocità u in direzione y'. Mentre il sistema di RIF. $\mathcal{R}_2$ è parallelo a $\mathcal{R}_1$ e quest'ultimo è parallelo a $\mathcal{R}$, i RII $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}$ **non**

sono paralleli! La transitività non vale con le trasformazioni di Lorentz.[23] C'è poi una ricca analisi di tutta la fenomenologia legata alle trasformazioni di Lorentz che hanno peraltro la particolarità, rispetto alle trasformazioni di Galileo, che un cambiamento di scala delle coordinate spaziali e temporali in un dato RI deve avere la forma: $x^{'} \rightarrow \lambda x$, $t^{'} \rightarrow \lambda t$. Dunque con lo stesso coefficiente λ per entrambe le coordinate. Una conseguenza interessante è che la terza legge di Keplero non vale nella meccanica relativistica.[24]. Si ottiene la nota precessione del perielio nelle orbite planetarie. Non viene trascurato neanche l'effetto Doppler con le sue novità

- concettuali (eliminazione dell'etere luminifero)
- quantitative (correzione alla previsione classica sull'effetto longitudinale)
- qualitative (previsione di un effetto Doppler trasversale numericamente dipendente dal fatidico fattore γ)

La frequenza infatti non è una caratteristica intrinseca della radiazione. Dipende dal RI scelto! La fase invece non dipende dal RI ed è pertanto una grandezza invariante della radiazione.
Il libro si chiude con un esauriente discusione della formula di Kramers-Kronig[25] dove si studia anche la relazione che traduce in termini matematici il principio di causalità[26] cioè la relazione tra la parte reale e quella immaginaria dell'indice di rifrazione:

$$n_r(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^{\infty} \frac{\omega' n_i(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}\, d\omega'$$

La cosa più sorprendente è che la velocità di gruppo, v_g, in un mezzo in cui c'è dispersione anomala può essere $v_g > c$, $v_g = \infty$, $v_g < 0$. Infatti:

$$v_g = \left(\frac{dk_r}{d\omega}\right)^{-1} = \left[\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega n_r(\omega)}{c}\right)\right]^{-1} = \frac{c}{n_r(\omega) + \omega\dfrac{dn_r}{d\omega}}$$

[23] Un importante conseguenza fisica di questo fatto è la nota **precessione di Thomas**.

[24] Si consulti il libro 'Fisica e strumenti matematici' di C.Bernardini- Editori Riuniti, 1979.

[25] Nel libro 'Una rivoluzione mancata - Il bootstrap e i dieci anni che potevano cambiare la fisica, Bollati Boringheri, di F.M.Scarpa si ricorda come anche il fisico italiano Marcello Cini sia pervenuto ad un analoga relazione di dispersione studianto problemi di viscoelasticità e utilizzando opportunamente il principio di causalità

[26] Il principio di causalità viene quì usato nella sua accezione più semplice ovvero come principio di antecedenza: **la causa precede l'effetto**.

Nel caso di dispersione normale sempre $n_r > 1$ e $dn_r/d\omega > 0 \Longrightarrow v_g > c$. Negli intervalli di frequenza in cui vi è dispersione anomala si ha $dn_r/d\omega < 0$ ed allora la velocità di gruppo può assumere i valori sopra indicati. Velocità di gruppo anomale, superluminali, infinite o negative, generano apparenti paradossi che tuttavia non violano alcuna consolidata legge fisica. Infatti nelle regioni a dispersione anomala, la velocità di gruppo non ha significato fisico e non può essere identificata con la velocità del segnale[27]. La relatività è salva. Ed siamo anche giunti ala fine di un impressionante viaggio nella fisica dell'elettromagnetismo che documenta uno dei più straordinari sforzi che l'umana mente abbia mai condotto per cercare di comprendere il mondo che ci circonda e di cui siamo parte. Una scarna, ma essenziale bibliografia conclude la meritoria fatica del nostro autore. Un libro, di necessaria lettura, dalla complessa, ma fluida matematica prosa. Un testo da custodire nelle propria privata biblioteca.

Antonino Gentile

[27]La definizione della grandezza velocità di segnale è assai complessa ed è legata alle proprietà analitiche dell'integrale di Fourier. Si può consultare a tal proposito il libro di L.Brillouin - Propagation and Group Velocity - Accademic Press, 1960

Appendice A

Osservare e vedere

Nella relatività si fa uso di termini quali osservatore e osservazione. Osservare va inteso nel senso di misurare. Un osservatore, dotato di regoli ed orologi, misura lunghezze , tempi, velocità, accelerazioni ecc. C'è un essenziale differenza tra osservare e vedere. La contrazione di Lorentz è osservabile, ma non visibile come , per lungo tempo, si era ritenuto. Vedere o fotografare un asta in rapidissimo movimento sarebbe, in liea di principio, possibile, ma l'asta non ci apparirebbe contratta. James Terrel in un articolo apparso sulla Physical Review del 1959, pag.1041, ha chiarito l'intera questione. Quando vediamo o fotografiamo un oggetto registriamo l'arrivo **simultaneo** della radiazione sulla retina dell'occhio o sulla pellicola fotografica. Ma questa radiazione viene riflessa in istanti diversi dai vari punti dell'oggetto che non sono tutti alla stessa distanza dalla retina o dalla lastra fotopgrafica. La radiazione che giunge dai punti più lontani è stata emessa prima. Qindi se l'oggetto è in moto esso ci apparirà **ruotato**. La misura implica, invece, che la radiazione sia diffusa simultaneamente dai punti estremi dell'oggetto. Consideriamo un cubo di spigolo dlunghezza l che si muove con velocità v rispettto ad un RIF. lontano in cui c'e una macchina fotografica.

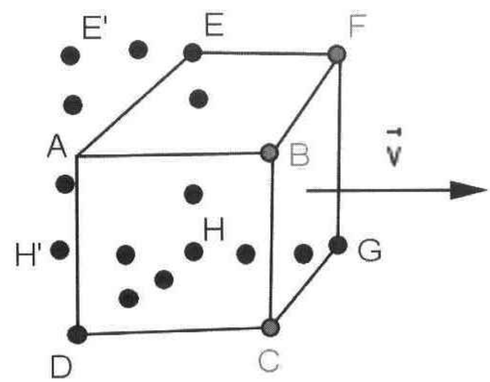

Figura A.1: cubo in moto visto da un lontano RIF.

La radiazione proveniente dall faccia ABCD del cubo raggiune **simultaneamnte** la lastra della macchina fotografica. Ma per il movimento del cubo, la lastra riceve la radiazione anche dai vertici E e H quando questi vertici occupavano la posizioni E' e H$'$. La faccia laterale AEHD è qundi visibile e si vede lo spigolo $\overline{EA}$ lungo come $\overline{\mathrm{E'E}}$. Abbiamo $\overline{AB} = l\sqrt{(1-v^2/c^2)}$, $\overline{EA} = \overline{\mathrm{E'E}} = (v/c)l$ in quanto il tempo in cui il vertice si sposta da E$'$ ad E, cioè, $\overline{\mathrm{E'E}}/v$, deve essere uguale al tempo che la luce proveniente da E$'$ impiega per percorrere la distanza in più rispetto ad A. Se, come abbiamo supposto, il cubo è assai distante $\overline{\mathrm{E'E}} \sim l$ e il tempo corrispondente sarà $\overline{\mathrm{E'E}}/v = l/c$. Dunque $\overline{\mathrm{E'E}} = (v/c)l$ e la faccia laterale AEHD, fotografata, ha larghezza uguale a $(v/c)l$. In definitiva il cubo appare ruotato di un angolo $\vartheta = \sin^{-1}(v/c)$. Se l'angolo sotteso dall'ogetto rispetto alla macchina fotografica non è piccolo, allora le varie parti del'oggetto appaiono ruotati di angoli di diversa ampiezza e qundi la forma dell'oggetto stesso si presenta **distorta**.