UN PROBLEMA INTERESSANTE

In occasione della VII Gara Nazionale di Matematica è stato proposto il seguente problema:
Dimostrare che:

$$\left(1^5+2^5+\cdots+n^5\right)+\left(1^7+2^7+\cdots+n^7\right)=2\left(1+2+\cdots+n\right)^4$$

A primo acchitto viene spontaneo dimostrare quanto richiesto calcolando

$$S_5=1^5+2^5+\cdots+n^5,\quad S_7=1^7+2^7+\cdots+n^7$$

e verificare che:

$$S_5+S_7=2S_1^4 \qquad (1)$$

Tale procedimento si presenta tanto ovvio quanto prolisso; nondimeno è il caso di patire da questo nodo "spontaneo" per evidenziare poi l'eleganza dimostrativa del metodo di induzione matematica.
Per il primo procedimento si ricorre ad una formula ricorsiva che consente il calcolo della somma della potenze simili dei termini di una progressione geometrica. Quindi:

$$a_{n+1}^{k+1}-a_1^{k+1}=\binom{k+1}{1}dS_k+\binom{k+1}{2}d^2S_{k+1}+\cdots+\binom{k+1}{k}d^k+nd^{k+1}$$

Se in tale formula si pone :

$$a_n=n,\quad a_1=1,\quad d=1$$

e poi sia :

$$S_k=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$$

si trovano, dopo grandi e crescenti difficoltà algoritmiche:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3 = S_1^2, \quad S_4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{42},$$

$$S_5 = n^2 \frac{2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1}{12},$$

$$S_6 = n \frac{6n^6 + 21n^5 + 21n^4 - 7n^2 + 1}{42},$$

$$S_7 = n^2 \frac{3n^6 + 12n^5 + 14n^4 - 7n^2 + 2}{24}$$

Allora avremo:

$$S_5 + S_7 = n^2 \frac{2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1}{12} + n^2 \frac{3n^6 + 12n^5 + 14n^4 - 7n^2 + 2}{24} =$$

$$= 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4 = 2S_1^4$$

Applichiamo ora il metodo di induzione matematica. L'uguaglianza (1) è vera per n = 1 .
Supponiamo che l'uguaglianza sia vera per n – 1 e qundi partiamo dall'identità:

$$\left[1^5 + 2^5 + \cdots + (n-1)^5\right] + \left[1^7 + 2^7 + \cdots + (n-1)^7\right] =$$

$$= 2(1 + 2 + \cdots + n - 1)^4$$

e aggiungiamo ad ambo i membri il termine:

$$n^5 + n^7$$

per cui si ha l'uguaglianza vera:

$$\left[1^5 + 2^5 + \cdots + (n-1)^5 + n^5\right] + \left[1^7 + 2^7 + \cdots + (n-1)^7 + n^7\right] =$$

$$= 2(1 + 2 + \cdots + n - 1)^4 + n^5 + n^7$$

ossia

$$s_5 + s_7 = 2\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^4 + n^5 + n^7 =$$

$$= \frac{n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4}{8} = \frac{n(n+1)^4}{8}$$

Infine:

$$s_5 + s_7 = 2\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^4 = 2S_1^4$$

Peppe Ditta