

Sezione

Scientifica

Una introduzione alla rappresentazione geometrica del linguaggio

La Latent Semantic Analysis(LSA) è un metodo di rappresentazione e di elaborazione dell'informazione che ha una base matematica inerente all'analisi delle componenti principali. Questo approccio ha una motivazione psicologica nell'emulazione di processi psico-linguistici, come quello dell'acquisizione del linguaggio da parte di studenti di scuole primarie.

Lo studio ha preso le mosse dalla ricerca di due psicologi dell'Università del Colorado e del New Jersey che aveva come oggetto, nella sua formulazione più generale, l'indagine di come comunemente si possieda una conoscenza maggiore di quella presente nelle semplici sorgenti di informazione a cui si è stati esposti. Il problema è noto come "limitatezza dello stimolo" o talvolta come il "problema di Platone" sapendo come il filosofo abbia, in modo così affascinante, rapportato le conoscenze acquisite e l'esperienza diretta.

Un alunno americano medio ai primi anni di scuola primaria acquisisce la conoscenza di 10-15 parole che non conosceva il giorno precedente. L'acquisizione di queste nuove parole deriva dalla lettura di testi in quanto: la maggior parte delle parole è utilizzata soltanto nei testi stampati, l'alunno conosce già i termini incontrati nel linguaggio parlato e gli alunni imparano meno di una parola al giorno per apprendimento pianificato.

Da test effettuati su vocabolari si verifica che gli alunni incrementano le parole conosciute con un ritmo di circa una parola ogni venti paragrafi letti. Dato che il numero medio di paragrafi letti è di circa cinquanta al giorno, si giunge al paradosso che questi studenti riescono ad acquisire più parole per giorno di quelle che effettivamente apprendono.

La tesi dei ricercatori che hanno introdotto LSA è che l'acquisizione dei nuovi termini e in generale delle nuove conoscenze, avvenga attraverso un processo di induzione che permetta l'inferenza dei significati delle parole e che tale processo sia emulabile attraverso la proiezione dallo spazio del problema ad uno spazio di dimensione ridotta.

Dallo studio della tecnica LSA, incentrato sul modello del processo computazionale di acquisizione e rappresentazione della conoscenza, si è sviluppato un secondo ramo, prettamente ingegneristico che utilizza la stessa base teorica per ottenere una stima delle relazioni semantiche tra termini, evidenziando le sinonimie o permettendo la classificazione di documenti di testo in base all'argomento trattato.

Di seguito viene fornito un esempio dove, con pochi termini e testi, si evidenzia la possibilità di individuazione di legami semantici tra argomenti nei testi e tra termini tramite un metodi di riduzione della dimensionalità quale la decomposizione ai valori singolari.

Un esempio

A titolo di esempio si porta un mini data-set di titoli di libri specialistici ai quali si applica la tecnica presentata. Nella Tabella 1 sono inseriti nove titoli divisi in due sezioni. La prima, indicata con C, indica testi che hanno come argomento l'interazione uomo-macchina. La seconda, indicata con la lettera M, indica volumi che hanno come argomento i grafi.

| Identificativo: | Titolo: |
|-----------------|---------|
|-----------------|---------|

| | |
|----|---|
| C1 | <i>Human machine interface</i> for ABC computer applications |
| C2 | A survey of user opinion of computer system response time |
| C3 | The EPS user interface management system |
| C4 | System and human system engineering testing of EPS |
| C5 | Relation of user perceived response time to error measurement |
| M1 | The generation of random, binary, ordered trees |
| M2 | The intersection graph of paths in trees |
| M3 | Graph minors ¹ IV: Widths of trees and well-quasi-ordering |
| M4 | Graph minors: A survey |

Tabella 1, Dati di Ingresso

A partire dai dati di ingresso si costruisce la matrice A, rappresentata in Tabella 2, costruita associando ad ogni riga un termine e ad ogni colonna un titolo di un libro. In realtà per chiarezza, un sottoinsieme di tutti i possibili termini presenti nei titoli è stato utilizzato e tali termini sono indicati in corsivo nella Tabella 1. Gli elementi della matrice sono riempiti considerando il numero di occorrenze del termine nel testo corrispondente.

| | C1: | C2: | C3: | C4: | C5: | M1: | M2: | M3: | M4: |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| <i>Human</i> | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| <i>Interface</i> | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| <i>Computer</i> | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| <i>User</i> | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| <i>System</i> | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| <i>Response</i> | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| <i>Time</i> | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| <i>EPS</i> | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| <i>Survey</i> | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| <i>Trees</i> | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| <i>Graph</i> | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| <i>Minors</i> | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Tabella 2, Matrice A

Da questa rappresentazione dei dati si può considerare una prima valutazione dei valori. Ad esempio si può calcolare la correlazione, attraverso il coefficiente di Spearman, tra la riga corrispondente al termine *Human* e la riga corrispondente al termine *User*.

$$r(\text{"Human"}, \text{"User"}) = -0,378$$

la correlazione tra le righe corrispondenti a *Human* e *Minors* risulta:

$$r(\text{"Human"}, \text{"Minors"}) = -0,286$$

¹ Un grafo minore è un sottografo ottenuto attraverso operazioni di contrazione e cancellazione di rami

I valori delle correlazioni mostrano che in questa rappresentazione i due termini, rappresentati dai rispettivi vettori, non hanno granché in comune e non possono essere assimilati.

Si applica quindi una riduzione di dimensionalità attraverso la Decomposizione ai Valori Singolari(SVD)(Eq (1)) che è una tecnica di fattorizzazione strettamente legata all'analisi delle componenti principali e quindi agli autovettori:

$$A = U\Sigma V^T \tag{1}$$

Un algoritmo per il calcolo delle matrici di fattorizzazione è fornito in appendice e per una descrizione più approfondita delle proprietà della SVD si fa riferimento alla prossima sezione. Un calcolo rapido è possibile tramite l'applicativo Matlab di MathWorks digitando il comando:

```
>> [U, S, V] = svd(A)
```

che restituirà le matrici U, Σ (nell'applicativo denominata S) e V mostrate in basso.

| | | | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -0,221 | -0,113 | 0,289 | -0,415 | -0,106 | -0,341 | -0,523 | 0,060 | 0,407 | -0,076 | 0,323 | -0,055 |
| -0,198 | -0,072 | 0,135 | -0,552 | 0,282 | 0,496 | 0,070 | 0,010 | 0,109 | -0,034 | -0,456 | -0,284 |
| -0,240 | 0,043 | -0,164 | -0,595 | -0,107 | -0,255 | 0,302 | -0,062 | -0,492 | 0,110 | 0,134 | 0,339 |
| -0,404 | 0,057 | -0,338 | 0,099 | 0,332 | 0,385 | -0,003 | 0,000 | -0,012 | -0,152 | 0,645 | -0,110 |
| -0,644 | -0,167 | 0,361 | 0,333 | -0,159 | -0,207 | 0,166 | -0,034 | -0,271 | -0,110 | -0,134 | -0,339 |
| -0,265 | 0,107 | -0,426 | 0,074 | 0,080 | -0,170 | -0,283 | 0,016 | 0,054 | -0,575 | -0,432 | 0,309 |
| -0,265 | 0,107 | -0,426 | 0,074 | 0,080 | -0,170 | -0,283 | 0,016 | 0,054 | 0,727 | -0,213 | -0,199 |
| -0,301 | -0,141 | 0,330 | 0,188 | 0,115 | 0,272 | -0,033 | 0,019 | 0,165 | 0,295 | -0,055 | 0,734 |
| -0,206 | 0,274 | -0,178 | -0,032 | -0,537 | 0,081 | 0,467 | 0,036 | 0,579 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| -0,013 | 0,490 | 0,231 | 0,025 | 0,594 | -0,392 | 0,288 | -0,255 | 0,225 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| -0,036 | 0,623 | 0,223 | 0,001 | -0,068 | 0,115 | -0,160 | 0,681 | -0,232 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| -0,032 | 0,451 | 0,141 | -0,009 | -0,301 | 0,277 | -0,340 | -0,678 | -0,183 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Tabella 3, Matrice Singolare Sinistra U

| | | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---|---|
| 3,3409 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 2,5417 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 2,3539 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1,6445 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1,5048 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,3064 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,8459 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,56013 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,36368 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabella 4, Matrice Diagonale Σ

| | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -0,197 | -0,056 | 0,110 | -0,950 | 0,046 | -0,077 | -0,177 | 0,014 | 0,064 |
| -0,606 | 0,166 | -0,497 | -0,029 | -0,206 | -0,256 | 0,433 | -0,049 | -0,243 |
| -0,463 | -0,127 | 0,208 | 0,042 | 0,378 | 0,724 | 0,237 | -0,009 | -0,024 |
| -0,542 | -0,232 | 0,570 | 0,268 | -0,206 | -0,369 | -0,265 | 0,019 | 0,084 |
| -0,279 | 0,107 | -0,505 | 0,150 | 0,327 | 0,035 | -0,672 | 0,058 | 0,262 |
| -0,004 | 0,193 | 0,098 | 0,015 | 0,395 | -0,300 | 0,341 | -0,454 | 0,620 |
| -0,015 | 0,438 | 0,193 | 0,016 | 0,349 | -0,212 | 0,152 | 0,762 | -0,018 |
| -0,024 | 0,615 | 0,253 | 0,010 | 0,150 | 0,000 | -0,249 | -0,450 | -0,520 |
| -0,082 | 0,530 | 0,079 | -0,025 | -0,602 | 0,362 | -0,038 | 0,070 | 0,454 |

Tabella 5, Matrice Singolare Destra V

Il successivo passo è quello di ricostruire la matrice A, non utilizzando interamente le tre matrici ma considerando sottoparti di esse. Questo procedimento equivale alla ricostruzione dei dati considerando un sottoinsieme dei valori principali (in questo caso due). La ricostruzione, effettuata in questo modo, implica una perdita di informazioni, tuttavia la rappresentazione che ne risulta generata ha la caratteristica di presentare la minima distorsione a parità di dimensionalità e in aggiunta permette di generalizzare l'informazione consentendo l'emersione di legami latenti nei dati d'origine.

Considerando soltanto gli elementi delle prime due righe delle matrici U e V e la sottomatrice 2x2 di Σ , si ottiene una ricostruzione approssimata della matrice A, denominata \hat{A}

| | C1: | C2: | C3: | C4: | C5: | M1: | M2: | M3: | M4: |
|------------------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|
| <i>Human</i> | 0,162 | 0,401 | 0,379 | 0,468 | 0,176 | -0,053 | -0,115 | -0,159 | -0,092 |
| <i>Interface</i> | 0,141 | 0,370 | 0,329 | 0,400 | 0,165 | -0,033 | -0,071 | -0,097 | -0,043 |
| <i>Computer</i> | 0,152 | 0,505 | 0,358 | 0,410 | 0,236 | 0,024 | 0,060 | 0,087 | 0,124 |
| <i>User</i> | 0,258 | 0,841 | 0,606 | 0,697 | 0,392 | 0,033 | 0,083 | 0,122 | 0,187 |
| <i>System</i> | 0,449 | 1,234 | 1,051 | 1,266 | 0,556 | -0,074 | -0,155 | -0,210 | -0,049 |
| <i>Response</i> | 0,160 | 0,582 | 0,375 | 0,417 | 0,277 | 0,056 | 0,132 | 0,189 | 0,217 |
| <i>Time</i> | 0,160 | 0,582 | 0,375 | 0,417 | 0,277 | 0,056 | 0,132 | 0,189 | 0,217 |
| <i>EPS</i> | 0,218 | 0,550 | 0,511 | 0,628 | 0,243 | -0,065 | -0,143 | -0,197 | -0,108 |
| <i>Survey</i> | 0,097 | 0,532 | 0,230 | 0,212 | 0,267 | 0,137 | 0,315 | 0,444 | 0,425 |
| <i>Trees</i> | -0,061 | 0,232 | -0,139 | -0,266 | 0,145 | 0,240 | 0,546 | 0,767 | 0,664 |
| <i>Graph</i> | -0,065 | 0,335 | -0,146 | -0,301 | 0,203 | 0,306 | 0,695 | 0,977 | 0,849 |
| <i>Minors</i> | -0,043 | 0,254 | -0,097 | -0,208 | 0,152 | 0,221 | 0,503 | 0,707 | 0,616 |

Tabella 6, La matrice ricostruita \hat{A}

Nella colonna che si riferisce al titolo M4: "Graph minors: A survey", sono stati evidenziati i valori corrispondenti ai termini *Survey* e *Trees*. Il termine *Trees* non appariva nel titolo M4 tuttavia il valore corrispondente è balzato dal valore 0 al valore 0,664. Questo nuovo valore si può interpretare come la stima, da parte di questo modello, di quante volte questo termine apparirebbe in un infinito numero di titoli che contengono i termini *Graph* e *Minors*.

Di contro il valore che il termine *Survey*, traducibile con "sguardo" o "colpo d'occhio", aveva in M4 è sceso da 1 a 0,425 riflettendo il fatto che è un termine generico. Il termine è in qualche modo inaspettato in questo contesto e si può considerare come poco caratterizzante per il testo.

Oltre a queste relazioni tra termini singoli e insiemi di più parole (i titoli dei volumi), anche le relazioni tra i singoli termini risultano modificate nella nuova rappresentazione. Il termine *Human* non è presente in alcun titolo assieme a *User* e *Minors* e i valori di correlazione nei dati d'origine

sono entrambi negativi con un valore leggermente inferiore nella correlazione tra *Human* e *User*. Nella ricostruzione data dalla matrice \hat{A} la correlazione tra *Human* e *User* è divenuta:

$$\underline{r}(\text{"Human"}, \text{"User"}) = 0,939$$

mentre la correlazione tra le righe corrispondenti a *Human* e *Minors* risulta:

$$\underline{r}(\text{"Human"}, \text{"Minors"}) = -0,831$$

I termini *Human* e *User* vengono quindi “avvicinati” nella nuova rappresentazione a dimensionalità ridotta perché si trovano in contesti con analogo significato, anche se mai nello stesso titolo evidenziando un legame di sinonimia. In maniera inversa avviene tra i termini *Human* e *Minors* che risultano “allontanati” perché si riferiscono a contesti diversi e individuano un contenuto informativo differente.

Lo spazio vettoriale semantico

A partire dalla matrice A con m righe e n colonne, si può definire una rappresentazione per le parole e per i documenti. Ogni parola p_i è associata univocamente ad un vettore riga di dimensione n , mentre ogni documento (nell'esempio precedente costituiti dai titoli dei libri) d_j è univocamente associato ad un vettore colonna di dimensione m .

Queste rappresentazioni vettoriali sono scomode per scopi applicativi perché le dimensioni n e m sono tipicamente molto grandi nel caso di applicazioni reali, che i vettori sono tipicamente molto sparsi ed inoltre le due entità sono rappresentate in due domini diversi.

L'utilizzo della SVD permette di superare queste limitazioni e di giungere ad una rappresentazione con notevoli vantaggi. La matrice singolare U e analogamente la matrice singolare V , è formata da colonne che sono ortogonali tra loro e formano quindi una base per lo spazio R^r . Considerando che il vettore colonna della matrice A , denominato A_j , può essere rappresentato a partire dalla equazione (1) come:

$$A_j = U \Sigma v_j^T \quad (2)$$

si ottiene che il vettore colonna può essere rappresentato attraverso la proiezione del vettore $v_j \Sigma$ sulla base formata dai vettori colonna della matrice U .

Ogni documento e in maniera analoga ogni termine, ha quindi una corrispondente rappresentazione nello spazio vettoriale di dimensione r nel quale si possono applicare le proprietà geometriche degli spazi vettoriali, calcolare distanze, effettuare partizionamenti lo spazio, etc...

La SVD con l'utilizzo di un numero limitato di componenti principali, opera la proiezione di valori descritti in spazi ad alta dimensionalità su uno spazio con dimensione ridotta. Il valore finale per la dimensionalità dello spazio di arrivo è fissato attraverso criteri empirici e solitamente nelle applicazioni di ricerca di informazioni ha un valore tra 100 e 200.

L'idea che sta alla base di questa riduzione di dimensionalità è che la matrice ricostruita attraverso un numero limitato di componenti principali catturi le connessioni strutturali latenti che esistono tra i dati mentre trascuri gli effetti di “ordine superiore”, cioè meno caratteristici, che derivano dalla particolarità dei dati sperimentali.

In relazione a questa interpretazione, la vicinanza tra vettori nello spazio a dimensione ridotta indica una relazione di tipo semantico come evidenziato dalle prove. Due documenti rappresentati da vettori prossimi nello spazio sono caratterizzati da termini che appartengono allo stesso contesto e quindi tendono a veicolare informazioni sullo stesso argomento. Di contro, termini rappresentati da vettori prossimi tendono ad apparire nello stesso tipo di documenti e quindi sono sinonimi.

Le applicazioni di questo tipo del modello LSA sono molteplici e molte sono oggetto di analisi e di ricerca. Tra di esse si annoverano la classificazione semantica di documenti, la creazione di database di documenti indicizzati in relazione al loro contenuto (come ad esempio nei motori di ricerca), la creazione automatica di dizionari di sinonimi o partendo da testi bilingue, di dizionari interlinguistici e attraverso l'integrazione con gli n-grammi, creazione di modelli del linguaggio che vengono utilizzati nel riconoscimento del parlato.

Appendice

Algoritmo per il calcolo della Decomposizione ai Valori Singolari.

Data una matrice $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ al fine di calcolare le matrici per la decomposizione ai valori singolari (SVD) si eseguono i seguenti passi:

1. Determinare gli autovalori della matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ e ordinarli dal più grande al più piccolo
2. Determinare r (con $r \leq \min\{m, n\}$) autovettori corrispondenti ai primi r autovalori .
3. Creare la matrice singolare destra $\mathbf{V} \in R^{n \times r}$ unendo come vettori colonna gli autovettori ottenuti al passo precedente ordinati secondo l'ordine degli autovalori che li hanno generati
4. Creare la matrice diagonale $\mathbf{\Sigma} \in R^{r \times r}$ che ha come valori diagonali σ_i la radice quadrata degli autovalori λ_i
5. Creare la matrice singolare sinistra $\mathbf{U} \in R^{m \times r}$ unendo i vettori colonna calcolati come:

$$\mathbf{u}_i = \sigma_i^{-1} \mathbf{A} \mathbf{v}_i$$

FILIPPO VELLA

Riposte armonie: dal triangolo rettangolo alla *campila* di Eudosso.

Daniele Ritelli* e Aldo Scimone†

Sommario

Scopo di questa nota è mostrare come la celebre curva a croce e la *kampyle* di Eudosso possano essere considerate come casi particolari di un luogo geometrico generato attraverso un triangolo rettangolo.

Capita, a volte, che alcuni luoghi geometrici interessanti siano ottenuti in modo più semplice rispetto a quelli già noti, e che, proprio per questa ragione, abbiano una valenza educativa pregnante, come succede parallelamente in fisica quando, per illustrare una legge, un esperimento eseguito con mezzi “poveri” può essere didatticamente più efficace di quello condotto con strumenti più sofisticati.

Ciò accade soprattutto quando oggetti matematici noti vengono considerati da un nuovo punto di vista che consente di interpretarli in maniera più feconda, dando luogo non solo a importanti conseguenze matematiche ma anche a nuove prospettive didattiche.

La situazione è simile a quella di chi osserva il *David* di Michelangelo ponendosi soltanto di fronte alla statua e di chi, invece, ha la curiosità di osservarla anche dalla parte posteriore, ricavandone una conoscenza più profonda per poterla descrivere più dettagliatamente.

La storia della matematica ci offre tanti esempi di questo tipo, in cui, a volte, una semplice osservazione ha avuto un ruolo cruciale per dare una nuova e inattesa luce ad argomenti matematici entrati ormai da tempo nella sfera della *routine*.

Basti pensare al modo in cui una semplice (ma geniale) osservazione di N. Abel (1802-1829) sull'inversione degli integrali ellittici studiati in precedenza per più di quarant'anni da A. M. Legendre (1752-1833) inaugurò lo studio vasto e profondo delle funzioni trascendenti note come *funzioni ellittiche*.

Noi vogliamo illustrare con lo stesso spirito come alcune considerazioni elementari sul caro e *vetusto* triangolo rettangolo possano offrire spunti interessanti non solo per ricavare in maniera nuova risultati già noti, ma anche per permetterne una trasposizione didattica non priva di interesse sia nell'ambito

*Dipartimento di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali, viale Filopanti, 5 40126 Bologna, dritelli@economia.unibo.it.

†G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca per l'Insegnamento delle Matematiche), Dipartimento di Matematica, via Archirafi 34, 90123 Palermo, aldo.scimone@libero.it.



Abel

dell'insegnamento liceale della matematica che di quello universitario. Infatti, alcuni calcoli, altrimenti tedious, sono stati eseguiti mediante il software *Mathematica*[®], guidato opportunamente dal solutore, il che costituisce un esempio dell'uso consapevole di un software. Ciò può offrire, secondo noi, uno spunto interessante di *interplay* (per usare un termine inglese) tra la scoperta matematica filtrata attraverso la storia della matematica e la sua trasposizione didattica coadiuvata mediante l'uso del computer.

Consideriamo il triangolo rettangolo OAB della figura 1 e riferiamolo a un sistema di assi cartesiani ortogonali con $A(a, 0)$ e $B(0, b)$, e sia r la retta per A e B di equazione $bx + ay - ab = 0$.

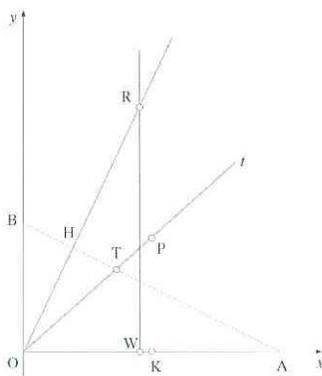


Figura 1:

Sia $y = mx$ una qualunque retta t per $O(0,0)$ e sia T il punto di intersezione

tra essa e AB . Le coordinate di T saranno:

$$\begin{cases} x_T = \frac{ab}{am + b}, \\ y_T = \frac{mab}{am + b}. \end{cases}$$

Riportiamo il segmento OT su OA . A tale scopo determiniamo l'intersezione tra la circonferenza di centro O e raggio uguale alla lunghezza del segmento OT con l'asse x . Il punto K di intersezione avrà ascissa:

$$x_K = \frac{ab\sqrt{1+m^2}}{am+b}.$$

Allora il punto P d'intersezione tra la retta per K perpendicolare ad OA e la retta t avrà coordinate:

$$\begin{cases} x_P = \frac{ab\sqrt{1+m^2}}{am+b}, \\ y_P = \frac{mab\sqrt{1+m^2}}{am+b}. \end{cases} \quad (1)$$

Eliminando il parametro m in (1) si ottiene il luogo del punto P , al variare di t , di equazione:

$$b^2x^4 + 2abx^3y + a^2x^2y^2 - a^2b^2x^2 - a^2b^2y^2 = 0. \quad (2)$$

La curva è simmetrica rispetto all'origine che è un punto doppio isolato da cui escono le rette isotrope:

$$y = \pm i x.$$

La curva possiede inoltre due asintoti verticali di equazione:

$$x = \pm b.$$

Per la ricerca degli asintoti obliqui, com'è noto, annullando i termini di grado massimo dell'equazione della curva si ha:

$$b^2x^4 + 2abx^3y + a^2x^2y^2 = 0,$$

dalla quale, dividendo per x^4 e ponendo $y/x = m$, si ottiene $m = -b/a$ contato due volte, per cui l'equazione dell'asintoto sarà del tipo $y = -b/ax + p$.

Facendo sistema tra questa retta e la curva si ottiene l'equazione risolvente in x di grado minore di 4, dalla quale, annullando il coefficiente della massima potenza di x si ottiene un'equazione in p che ha come soluzione $p = 0$, per cui la curva ammette l'asintoto obliquo:

$$y = -\frac{b}{a} x,$$

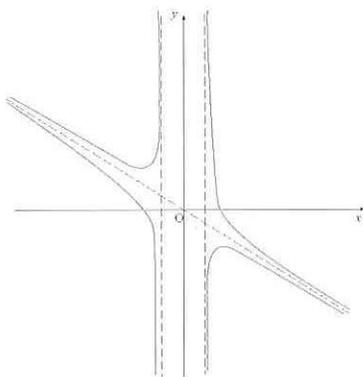


Figura 2:

che risulta parallelo alla retta per A e B . Il grafico della curva è mostrato in figura 2.

Se nella (3) dividiamo per a^2 e facciamo tendere a all'infinito, ovvero consideriamo il triangolo rettangolo degenerare, otteniamo la curva di equazione:

$$x^2y^2 - b^2x^2 - b^2y^2 = 0, \quad (3)$$

che è l'equazione di una celebre¹ quartica chiamata per la sua forma *curva a croce*, il cui grafico è illustrato nella figura 3.

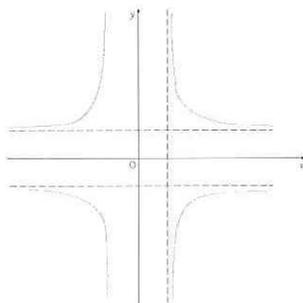


Figura 3:

In generale, la curva a croce ha equazione:

$$x^2y^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0,$$

¹Cfr. G. Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, Hoepli, Milano, 1930, Vol. I, Libro III, pp. 266-269; J. Dennis Lawrence, *A Catalog of Special Plane Curves*, Dover Publications, Inc., New York, 1972, pp. 130-131.

la quale, per $a = b$, viene detta *equilatera* o *circolare retta*, e assume la forma della (3). Quest'ultima può anche essere rappresentata dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \frac{b}{\cos \varphi}, \\ y = \frac{b}{\sin \varphi}, \end{cases}$$

dove φ è un parametro, che rappresenta l'angolo formato dalla semiretta variabile OP con l'asse x . L'origine è un punto doppio isolato e i punti all'infinito degli assi sono nodi d'inflessione; i punti reali della curva sono esterni alle striscie limitate dalle equazioni $x = \pm a$ e $y = \pm b$.

Questa curva si incontra sin dal 1847 in una questione proposta dal matematico francese O. Terquem (1782-1862) e tredici anni dopo in un lavoro² giovanile del matematico italiano F. Siacci (1832-1907), il quale dimostrò una bella proprietà della quartica: *la somma delle aree limitate dai quattro rami della curva e dai rispettivi asintoti è uguale all'area del rettangolo formato dagli asintoti stessi*.



Siacci

La curva fu studiata anche da E. Cesàro (1859-1906) che la chiamò *stauroides*, dal greco *σταυροειδης* che significa "a forma di croce", proprio per la sua forma.

La curva a croce circolare retta gode inoltre della proprietà che le podarie del centro rispetto ad essa e alla sua evoluta hanno la stessa area. La *curva*

²F. Siacci, *Intorno ad una linea di quart'ordine*, Giornale arcadico, Tomo CLXVII, 1860. Francesco Siacci insegnò Meccanica superiore all'Università di Torino, e dopo essere stato nominato, nel 1892, senatore del Regno si trasferì a Napoli per insegnarvi Meccanica razionale, rimanendovi sino alla morte. Si interessò di meccanica analitica, ma fu soprattutto uno dei più grandi balistici del suo tempo, autore di un celebre metodo (universalmente adottato per molti decenni) per il calcolo delle tavole di tiro.



Cesàro

la *croce*, che si è ottenuta come caso particolare della (3), può essere generata anche nel modo seguente. Si consideri un'ellisse (fig. 4) di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e si tracci la retta tangente in un suo punto qualsiasi M . Detti A e B i punti di intersezione della tangente con gli assi, si conducano per essi le rette m , n parallele agli assi, e sia P il loro punto di intersezione; esso sarà un punto della curva a croce.

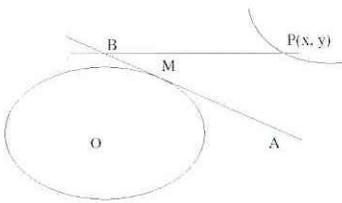


Figura 4:

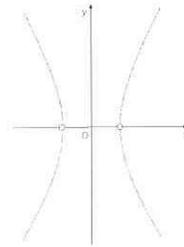


Figura 5:

Se, al contrario, dividiamo la (3) per b^2 e facciamo tendere b all'infinito otterremo la quartica di equazione:

$$x^4 - a^2x^2 - a^2y^2 = 0, \tag{4}$$

il cui grafico è illustrato nella figura 5. Essa interseca l'asse delle x in $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ ed è la famosa³ *curva campila* (*καμπύλιη γρομμμη*) che, secondo lo storico francese P. Tannery (1843-1904), fu utilizzata dal grande matematico greco Eudosso di Cnido (c. 408 - c. 355 B.C.) per eseguire sul piano la costruzione

³Cfr. G. Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, Hoepli, Milano, 1930, Vol. I, Libro V, pp. 448-452; J. Dennis Lawrence, *A Catalog of Special Plane Curves*, Dover Publications, Inc., New York, 1972, pp. 141-143.

architettata dal suo maestro Archita di Taranto (c. 400 - c. 360 B. C.) per risolvere il celebre problema della duplicazione del cubo, detto anche *problema di Delo*, in cui si chiedeva di costruire un cubo di volume doppio di quello di un cubo dato.



Archita

Poiché Ippocrate di Chio (V sec. a.C.) aveva mostrato che per determinare il lato del cubo da costruire bastava inserire due medie proporzionali tra il lato del cubo noto e quello da trovare, Archita, per riuscire a fare ciò, escogitò una soluzione ingegnosa che ancora oggi non può suscitare che ammirazione. Infatti, egli riuscì a risolvere il problema di Ippocrate determinando l'intersezione tra un cilindro, un toro e un cono, rappresentati dalle tre equazioni seguenti:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ax, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2, \end{cases}$$

dove $a > b$.

La campila può anche essere ottenuta come caso particolare di curve deducibili da una conica. Sia, infatti, M un punto qualsiasi dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e sia T il punto di intersezione della tangente all'ellisse in M con l'asse x (fig. 6).

Sia M' l'intersezione tra la retta OM con la parallela all'asse y condotta da T . Il luogo del punto $M'(x', y')$ si otterrà eliminando la x e la y tra le tre equazioni:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \\ x x' = a^2. \end{cases}$$

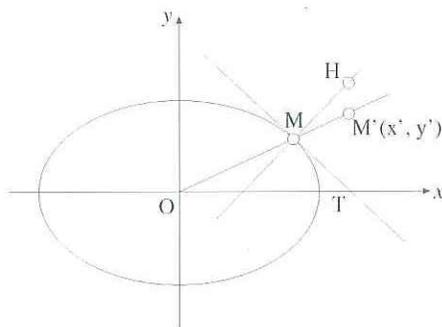


Figura 6:

La sua equazione sarà:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \frac{x'^4}{a^4},$$

la quale, per $a = b$ si riduce all'equazione della campila. Se, invece, sempre con riferimento alla figura 6, si considera l'intersezione H tra la normale in M all'ellisse e la parallela per T all'asse y , l'equazione del luogo del punto $H(x_1, y_1)$ si otterrà eliminando la x e la y tra le tre equazioni:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x x_1 = a^2, \\ \frac{a^2 x_1}{x} - \frac{b^2 y_1}{y} = a^2 - b^2, \end{cases}$$

ottenendo:

$$b^2 x_1^2 y_1^2 = (x_1^2 - a^2) (x_1^2 - a^2 + b^2)^2,$$

da cui, per $a = b$ si ha nuovamente l'equazione della campila.

La curva a croce e la campila si riducono alle due rette isotrope uscenti dall'origine sia quando nella (3) dividiamo per b^2 e facciamo tendere b a infinito, sia quando nella (4) dividiamo per a^2 e facciamo tendere a a infinito.

Il modo con cui si è qui ricavata l'equazione della curva a croce si presta ad un uso pedagogico ragionato della *computer algebra*. Infatti, i calcoli tediosi necessari per eliminare il coefficiente angolare m nel sistema irrazionale (1), sono rapidamente rimossi usando le capacità di calcolo di *Mathematica*[®], ma il software va guidato opportunamente da chi lo usa. Il docente dunque, anche al livello della scuola superiore, può utilizzare l'esempio in oggetto per introdurre all'uso consapevole del software, senza perdere di vista gli effetti scenici dati dalla rappresentazione delle curve piane in *Mathematica*[®].

L'istruzione per risolvere (1) unitamente alla risposta del sistema è illustrata in figura 7, vediamo che in questo modo *Mathematica*[®] non solo elimina il

coefficiente angolare m ma anche fornisce l'equazione esplicita del luogo, che è:

$$y = \frac{a b x^3}{a^2 b^2 - a^2 x^2} - \frac{x \sqrt{a^4 b^2 x^2 + a^2 b^4 x^2 - a^4 b^4}}{a^2 b^2 - a^2 x^2},$$

$$y = \frac{a b x^3}{a^2 b^2 - a^2 x^2} + \frac{x \sqrt{a^4 b^2 x^2 + a^2 b^4 x^2 - a^4 b^4}}{a^2 b^2 - a^2 x^2}.$$

```
In[1]:= Solve[{x ==  $\frac{a b \sqrt{1+m^2}}{a m + b}$ , y ==  $\frac{m a b \sqrt{1+m^2}}{a m + b}$ }, {m, y}]
```

```
Out[1]= {{y ->  $\frac{a b x^3}{a^2 b^2 - a^2 x^2} - \frac{x \sqrt{-a^4 b^4 + a^4 b^2 x^2 + a^2 b^4 x^2}}{a^2 b^2 - a^2 x^2}$ , m ->  $\frac{a b x^2 - \sqrt{-a^4 b^4 + a^4 b^2 x^2 + a^2 b^4 x^2}}{a^2 b^2 - a^2 x^2}$ },
```

```
{y ->  $\frac{a b x^3}{a^2 b^2 - a^2 x^2} + \frac{x \sqrt{-a^4 b^4 + a^4 b^2 x^2 + a^2 b^4 x^2}}{a^2 b^2 - a^2 x^2}$ , m ->  $\frac{a b x^2 + \sqrt{-a^4 b^4 + a^4 b^2 x^2 + a^2 b^4 x^2}}{a^2 b^2 - a^2 x^2}$ }}
```

Figura 7:

Successivamente il software può essere impiegato per scrivere l'equazione implicita della curva a croce mediante le istruzioni esplicitate nella figura 8:

```
In[2]:=  $\left(y - \frac{a b x^3}{a^2 b^2 - a^2 x^2}\right)^2 - \left(\frac{x \sqrt{-a^4 b^4 + a^4 b^2 x^2 + a^2 b^4 x^2}}{a^2 b^2 - a^2 x^2}\right)^2$  // Expand // Together
```

```
Out[2]=  $\frac{a^2 b^2 x^2 - b^2 x^4 - 2 a b x^3 y + a^2 b^2 y^2 - a^2 x^2 y^2}{a^2 (b^2 - x^2)}$ 
```

```
In[3]:= nume = Numerator[%]
```

```
Out[3]=  $a^2 b^2 x^2 - b^2 x^4 - 2 a b x^3 y + a^2 b^2 y^2 - a^2 x^2 y^2$ 
```

Figura 8:

Infine caricando il *package* **ImplicitPlot** si ottiene agevolmente la rappresentazione grafica della curva a croce attraverso il software, naturalmente prima è necessario fissare i valori di a, b, c :

```
In[4]:= curva = nume /. {a -> 2, b -> 1}
```

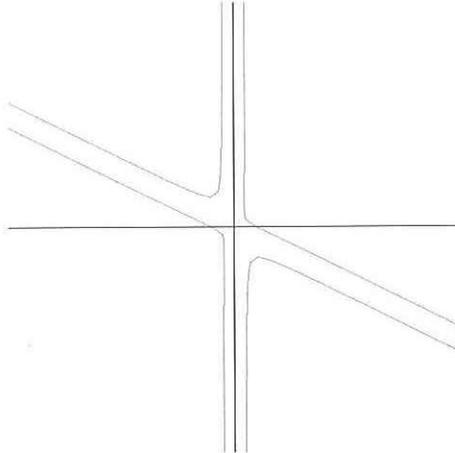
```
Out[4]=  $4 x^2 - x^4 - 4 x^3 y + 4 y^2 - 4 x^2 y^2$ 
```

Concludendo, abbiamo voluto mostrare come, partendo da una figura familiare come il triangolo rettangolo, con semplici considerazioni geometriche, due celebri curve che storicamente si erano ottenute in modi diversi, appaiono ora legate entrambe dalla particolarizzazione di un'unica curva rappresentata dall'equazione (2).

Questo offre una visione unitaria delle curve e, come già abbiamo detto all'inizio, può essere esempio di come, spesso, in matematica basta cambiare punto di vista perché improvvisamente argomenti che sembravano non collegati trovino una loro giustificazione comune.

```
In[5]:= << Graphics`ImplicitPlot`
```

```
In[6]:= ImplicitPlot[{curva = 0, x = 0, y = 0}, {x, -20, 20},
  {y, -20, 20}, Axes -> False, PlotStyle -> {Hue[1], .}]
```



```
Out[6]= - Graphics -
```

Tutto ciò, come ogni altro caso che offra una visione unitaria della matematica, ha, secondo noi, una valenza educativa rilevante.

Riferimenti bibliografici

- [1] J. Dennis Lawrence, *A Catalog of Special Plane Curves*, Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [2] G. Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, Hoepli, Milano, 1930.
- [3] F. Siacci, *Intorno ad una linea di quart'ordine*, Giornale arcadico, Tomo CLXVII, 1860.

La misura: il limite che la natura ha posto all'uomo
per la conoscenza di se stessa.

di *Samuele Raccosta*

Misurare una grandezza fisica è il primo vero problema che si pone uno scienziato. Da un punto di vista scientifico vale la pena discutere solo su ciò che si può misurare. Ciò non vuol dire che le cose non misurabili non esistono, ma solo che queste non possono essere investigate tramite la scienza e non è detto che siano condivise da tutti; in questi casi possono intervenire la fede, la filosofia, il proprio "saper sentire", ecc...

Il filosofo, quando elabora un proprio pensiero su uno o più aspetti della realtà, non scopre qualcosa di oggettivo su essa, ma formula una costruzione logica più o meno coerente ed auto-consistente a partire da principi primi, generalmente ritenuti veri. In filosofia vi sono vari autori che pur partendo da osservazioni incontestabili giungono, dopo una serie di passaggi logici, a descrizioni diverse della realtà, spesso in antitesi tra loro. Questo modo di procedere, pur essendo molto stimolante da un punto di vista culturale perché permette di esercitare la capacità di ragionamento e di riflettere più a fondo su noi stessi, non ha la potenza predittiva della scienza. L'errore si origina quando si ritengono giusti dei passaggi logici senza una conferma sperimentale. Ovviamente, in ambito umanistico, trovare delle prove sperimentali è quasi impossibile. Se vi chiedessi chi ha più ragione tra Schopenhauer e Kierkegaard, non otterrei una risposta univoca perché non si sono occupati di argomenti prettamente scientifici. Se invece vi chiedessi se ha più ragione Talete o Galileo o Cartesio o Newton sono sicuro che nessuno mi risponderebbe Talete, perché ormai tutti sappiamo che la Terra non è piatta e che non galleggia sull'acqua.

Sappiamo che ogni misura è accompagnata da un errore, che dipende dallo strumento e da altri fattori più o meno controllabili. Anche se questo, purtroppo, è un argomento su cui poco si insiste a scuola, rappresenta un elemento con cui ci si scontra ogni giorno. Sapere da quali errori sono affette le misure è importante perché ci indica la bontà di un modello. Per chiarire supponiamo che qualcuno, cronometrando un'auto, abbia costruito una tabella (Tab.1) con le posizioni occupate dal veicolo in vari istanti di tempo e ci chieda di verificare se il veicolo ha mantenuto una velocità costante o meno. Il grafico è riportato in Fig.1.

| S(m) | T(s) |
|------|------|
| 47 | 1 |
| 100 | 2 |
| 158 | 3 |
| 198 | 4 |
| 251 | 5 |

Tab. 1

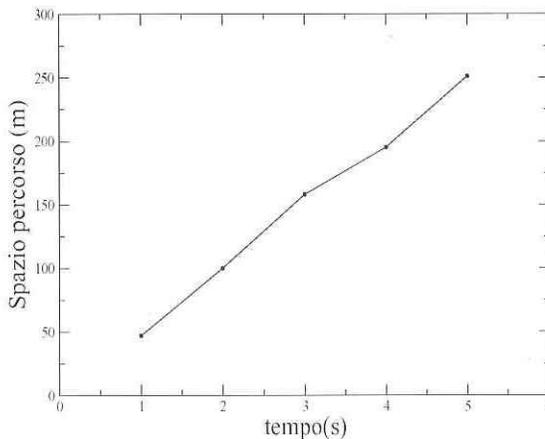


Fig.1

Se non sappiamo con quali strumenti siano state eseguite le misure non possiamo dare una risposta. Se lo sperimentatore ci comunica gli errori associati alle misurazioni, il grafico (Fig.2) diventa ad esempio:

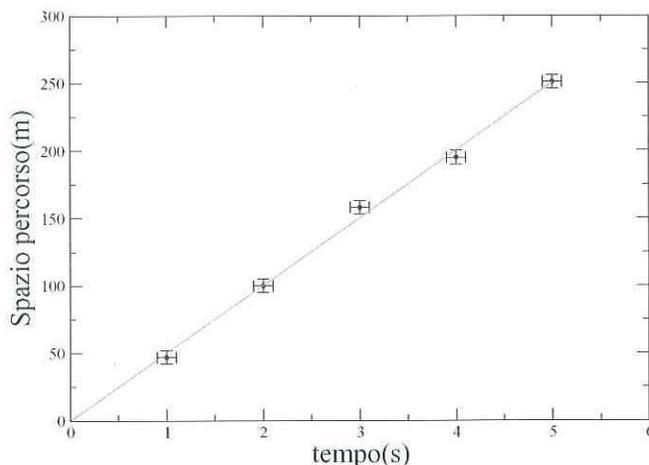


Fig.2

La retta di regressione è compatibile con l'ipotesi di moto rettilineo uniforme, ma con queste incertezze non possiamo dire se effettivamente l'auto ha mantenuto una velocità costante o meno: in ogni caso le barre d'errore occultano questa informazione. Se lo sperimentatore avesse ottenuto gli stessi dati con strumenti anche solo dieci volte più precisi avremmo (Fig.3):

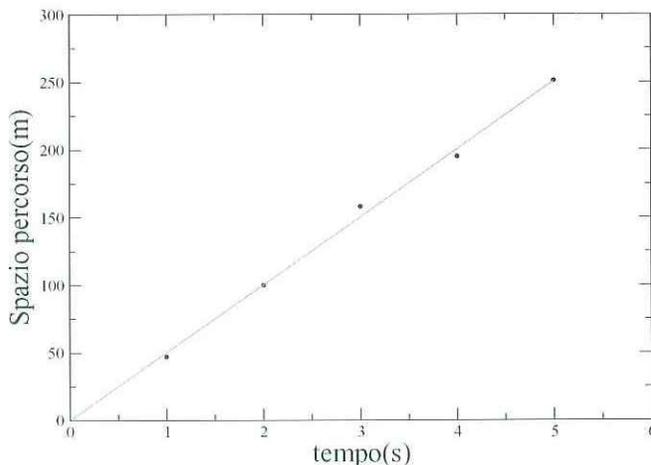


Fig.3

La retta di regressione mostra che la velocità dell'auto è rimasta costante solo approssimativamente ed ha subito delle piccole variazioni.

E' possibile costruire strumenti con precisione infinita? La risposta è negativa. Ma il problema delle incertezze non è solo di tipo pratico. E' anche teorico, intrinseco al concetto stesso di misura. L'argomento è stato affrontato e risolto da W. Heisenberg nel 1927 con il principio d'indeterminazione, un punto fermo della meccanica quantistica. Esso può essere espresso in due modi:

$$1) \Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \qquad 2) \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

In queste disequazioni compare \hbar che è la costante di Planck divisa per 2π e vale $6.62 \cdot 10^{-34}$ J s. \hbar è una costante universale e appare sempre quando si trattano processi microscopici e anche nella fisica delle stelle dove si studiano oggetti di dimensione assai rilevante.¹

Entrambe le disequazioni ci dicono che è *impossibile misurare contemporaneamente due variabili coniugate* (nel senso di Fourier) *con precisione arbitraria*. Data una $\psi(x)$, definiamo la corrispondente trasformata di Fourier:

$$\psi(p) = \int \psi(x) \cdot e^{\frac{ipx}{\hbar}} dx$$

$$\psi(x) = \int \psi(p) \cdot e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx$$

Si ha anche che:

In tal senso la coppia di variabili x e p si dice coniugata secondo Fourier.

Per comprendere meglio il significato della disequazione 1) facciamo un esempio. Supponiamo che in una stanza ci sia una particella A ferma, con o senza massa. Se vogliamo individuare la posizione della particella A dobbiamo "vederla"; per "vederla" dobbiamo "illuminarla" o farla interagire con un sistema che conosciamo e che possiamo controllare. Spesso si usa una radiazione elettromagnetica abbastanza energetica (raggi x, raggi γ , ...) o particelle dotate di massa (elettroni, neutroni, ...).

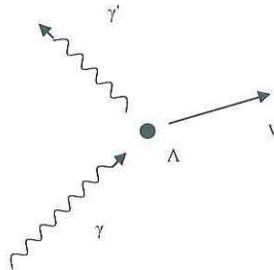


Fig.4 Il fotone γ , investendo la particella A, viene diffuso cedendo parte della propria quantità di moto ad A. La direzione di diffusione di γ' e di A non sono definibili a priori a causa delle proprietà ondulatorie di γ e di A.

Supponiamo di mandare un fotone γ (un quanto di luce) di frequenza ν , con energia $E=h\nu$ e con momento $p=h\nu/c$, contro la particella A inizialmente ferma (Fig.4): essa acquista un quantità di moto $m\nu$ a spese di quella del fotone γ , che viene diffuso con quantità di moto minore e quindi con frequenza minore. Conoscendo γ e γ' possiamo sapere dove si trovava la particella A al momento dell'interazione particella-fotone. Sappiamo anche che momento aveva A nell'istante dell'interazione? Per scoprirlo dovremmo eseguire misure di altro tipo sulla particella, le cui condizioni sono state già modificate dalla misura di posizione tramite l'interazione col fotone. Quindi ci dobbiamo accontentare di conoscere p entro l'intervallo Δp . Un altro punto fondamentale

di questa discussione è quindi che *“fare una misura su un sistema lo modifica inevitabilmente”*. Cosa fare allora? Bisogna trovare un compromesso: ottenere una misura sufficientemente accurata per i propri scopi cercando di non perturbare troppo il sistema. Ad esempio la diffrazione ai raggi x serve a conoscere la struttura dei cristalli: i raggi x sono già abbastanza energetici per dare informazioni precise sulla posizione media degli atomi del cristallo. Se aumentassimo l'energia dei fotoni, passando ad esempio a quelli γ , distruggeremmo l'assetto cristallino degli atomi, cioè perturberemmo troppo il sistema: a questo punto servirebbero a poco le ulteriori misure per conoscere la posizione degli atomi perché ormai il sistema non è più quello che volevamo studiare.

Il principio di Heisenberg trae origine dal fatto che \hbar è diverso da zero! Se non fosse così potremmo conoscere, almeno teoricamente, istante per istante e con precisione infinita la posizione e la velocità di una particella elementare: ciò equivarrebbe ad avere la traiettoria di tali particelle, il che è falso, come confermato sperimentalmente.

Vi è un esperimento molto interessante che ha gettato luce sulla questione che *“la misura perturba il sistema”*. Esso è una rivisitazione di quello eseguito da Young nel 1801. Facciamo incidere un'onda luminosa su uno schermo P su cui vi sono due fenditure (Fig.5). Cosa si osserva su uno schermo E posto davanti al primo?

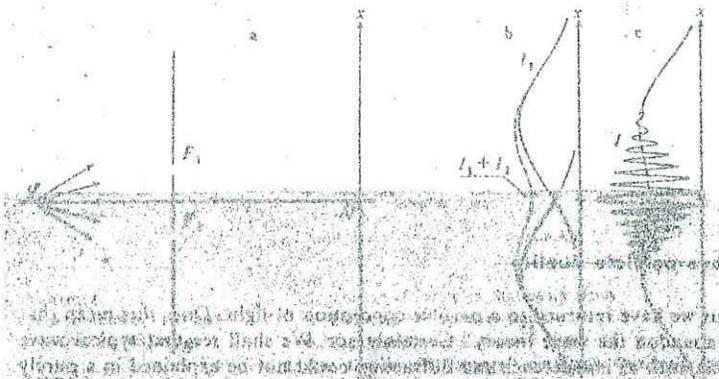


Fig. 5 Ciascuna delle due fenditure F_1 e F_2 produce una figura di diffrazione sullo schermo E. Le intensità corrispondenti sono $I_1(x)$ e $I_2(x)$ (linee continue in fig. b). Quando le due fenditure sono aperte contemporaneamente l'intensità $I(x)$ osservata sullo schermo non è la somma $I_1(x)+I_2(x)$ (linea tratteggiata in fig. b,c), ma mostra oscillazioni dovute all'interferenza tra i campi elettrici provenienti da F_1 e F_2 (linea continua in fig.c).

Si può dimostrare facilmente con l'elettrodinamica classica che sullo schermo E, comparirà una figura d'interferenza. Tuttavia la luce è costituita da particelle, certo assai diverse da quelle che osserviamo quotidianamente con i nostri grossolani sensi: i fotoni. Supponiamo di diminuire a nostro piacimento l'intensità della luce incidente fino a quando solo un fotone per volta passerà dalle fenditure. Se lo schermo E è una lastra fotografica molto sensibile, ogni volta che sarà colpita da un fotone verrà impressionata in un punto. Inizialmente tali punti sembreranno distribuiti a caso, ma aspettando un tempo sufficientemente lungo verranno ricostruite le frange d'interferenza. Fin qui nulla di sconvolgente. Adesso vi chiedo: *“Da quale delle due fenditure passerà il fotone?”*. Non possiamo saperlo a priori. L'unico modo di scoprirlo è fare delle misure. Poniamo un rivelatore davanti a una delle fenditure. Sapendo che, ad esempio, arriva un fotone ogni microsecondo, possiamo sapere da quale fenditura è passato ciascun fotone. Il problema è che, pur aspettando un tempo lungo, non osserveremo la figura d'interferenza sullo schermo E! Ciò è dovuto all'oscuramento di una fenditura; il sistema è cambiato passando da due fenditure a una fenditura e riveleremo l'intensità I_1 su E, senza zone d'ombra. Come risolvere il problema? Semplice, non è possibile! Se tentiamo di sapere con certezza da quale fenditura è passato il fotone, modifichiamo il

sistema. In questo esperimento mette in evidenza due concetti. Il primo è il principio di complementarità: se rinunciamo ad avere informazioni sul percorso del fotone osserveremo qualcosa che può essere descritto anche utilizzando i modelli dell'elettromagnetismo classico che postulavano una natura ondulatoria della luce e la relativa figura d'interferenza; se vogliamo conoscere il percorso del fotone o anche spiegare l'effetto fotoelettrico la luce ci sembrerà fatta ed è fatta di unità discrete che possiamo "catturare" sul rivelatore. Capire il secondo concetto richiede un po' più d'impegno. Da un punto di vista statistico, se considerassimo i fotoni come delle palline classiche e se lasciassimo aperte entrambe le fenditure, ci sarebbe il 50% di possibilità che un fotone passi attraverso la prima fenditura o la seconda. Se così fosse, non dovrebbe cambiare nulla se per metà del tempo oscuro una fenditura e per metà oscuro l'altra. Ed invece, così facendo, si distrugge la figura d'interferenza e l'intensità rivelata su E è uguale ad $I_1(x)+I_2(x)$. Come risolvere l'enigma? Feynman, a proposito, affermò "Il fotone fiuta tutti i percorsi possibili e la sua scelta è solo dovuta al caso." E' questo un fenomeno tipicamente quantistico, che non ha uguali in ambito classico; tuttavia per intensità luminose grandi il comportamento quantistico e quello classico portano allo stesso risultato: la formazione delle frange d'interferenza. Va notato inoltre, che lo stesso esperimento può essere ripetuto con elettroni o altre particelle con massa, purché dotate di opportuna energia.

Adesso chiariamo il significato della seconda formulazione del principio di Heisenberg considerando un atomo. Per semplicità assumiamo che esso abbia solo due livelli di energia, ossia solo due stati: quello fondamentale e quello eccitato. Evitando di entrare nei dettagli, se supponiamo di preparare l'atomo nello stato eccitato, che ammettiamo essere un'autostato dell'Hamiltoniana del sistema (tradotto: "stabile nel tempo"), la meccanica quantistica ci dice che, in assenza di perturbazioni esterne (che tuttavia sempre ci sono. Infatti anche nel vuoto più spinto è presente un campo elettromagnetico che diseccita l'atomo), l'atomo rimarrebbe "indefinitamente" in quello stato! Alla luce del principio di Heisenberg, sapendo che l'atomo si trova nello stato eccitato sappiamo esattamente quanto è la sua energia, cioè $\Delta E=0$; ma allora $\Delta t \rightarrow \infty$! Se, invece, non prepariamo il sistema in uno stato particolare non sapremo se si trova nello stato fondamentale o in quello eccitato.

Allora $\Delta E=E_1-E_0 \Rightarrow \Delta t \neq 0$ e finito: ciò vuol dire che statisticamente ad ogni Δt il sistema cambierà stato.

Ciò che abbiamo detto non deve, però, suggerisce l'idea che il principio d'indeterminazione trova applicazione solo in meccanica quantistica. Questo principio è consistente con la teoria delle trasformate di Fourier ed applicabile anche in fisica classica. Supponiamo, infatti, di avere un'onda piana monocromatica ideale a frequenza ν_0 ; nello spazio delle frequenze essa si rappresenta come una δ -Dirac (una strana "funzione" che è diversa da zero per $\nu=\nu_0$ ed è nulla altrove²), mentre in quello dei tempi essa si mostra come un'onda infinitamente estesa. Ciò vuol dire che non esiste un istante di tempo in cui ha cominciato a propagarsi: in realtà non esistono onde monocromatiche ideali. Un'onda reale, nello spazio delle frequenze si rappresenta così (Fig. 6):

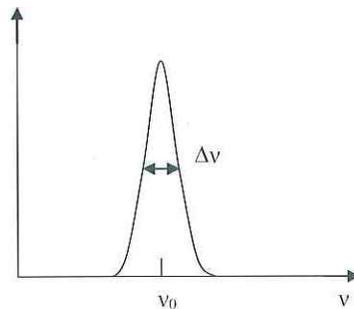


Fig.6 Trasformata di Fourier di un'onda approssimativamente monocromatica.

Cioè l'onda non ha una ν_0 ben precisa, ma la frequenza è definita entro un certo $\Delta\nu$. Ciò è responsabile, ad esempio, della transizione dell'atomo al livello eccitato anche nel caso in cui la frequenza della radiazione incidente non sia esattamente $(E_1 - E_0)/h$.

Non mi dilungherò con questi discorsi, forse un po' astrusi, ma se pensate che il problema della misura si sia esaurito qui, vi sbagliate! Fino all'avvento di Einstein, Lorentz, Maxwell, si "credeva" nei concetti assoluti di spazio e tempo. Nel 1905 Einstein, con la teoria della relatività ristretta, ha rivoluzionato il modo di pensare facendo crollare i pilastri della scienza galileo-newtoniana. Ha dimostrato teoricamente e con un'eleganza formale incredibile che la misura di una lunghezza e di un intervallo di tempo non sono assoluti, ma dipendono dal sistema di riferimento in cui ci troviamo! In altre parole, se qualcuno vi chiede quanto è lunga la penna che avete in mano, non basta dire $x \pm \Delta x$ cm: bisognerebbe, a rigore, specificare anche rispetto a quale sistema di riferimento si vuole avere questa informazione! E' strabiliante come Einstein, guidato dal rigore logico-matematico, sia riuscito a prevedere i vari effetti che scaturiscono dalla sua teoria diversi anni prima che giungessero le conferme sperimentali. E' stato geniale perché non ha tralasciato nulla (così sembra), ma ha anche avuto una certa dose di fortuna perché non si è trovato di fronte a dilemmi a cui solo gli esperimenti avrebbero potuto rispondere. Ricordate che una teoria fisica, anche se interessante e convincente, riceve l'approvazione della comunità scientifica solo dopo i riscontri sperimentali. Quando poi più raffinati esperimenti mettono in luce nuovi effetti, la teoria viene superata, ma non rimossa. Si pensi alla fisica newtoniana e poi alla fisica relativistica, monumenti dell'umano ingegno.

Spero di non avervi confusi troppo e di avervi fornito degli spunti di riflessione in modo che, d'ora in poi, ogni volta che *misurerete* qualcosa porrete attenzione alla problematica che si nasconde dietro questa operazione.

Note:

- 1- Vedi A. GENTILE : "ENERGIA ED EVOLUZIONE STELLARE: PRESENTAZIONE DIDATTICA" "IL FARDELLA" num.1, pag. 40, Addendum 5.
- 2- Lo strano oggetto $\delta(x)$ è un'iperfunzione o distribuzione. E' la derivata della celebre funzione a gradino di Heaviside:

$$\theta(x) = \frac{|x| + x}{2x} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

che secondo l'analisi classica non ammette derivata in $x = 0$. In base alla teoria delle iperfunzioni, di cui una bella descrizione si può trovare nel titanico libro di R. Penrose (vedi bibliografia), si ha invece:

$$\delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

Le iperfunzioni date su \mathbb{R} sono coppie di funzioni olomorfe definite in regioni aperte che contengono \mathbb{R} . Per i curiosi elenchiamo le belle coppie che definiscono $\theta(x)$ e $\delta(x)$:

$$\theta(x) = \left(\frac{1}{2\pi i} \log z, \frac{1}{2\pi i} \log z - 1 \right)$$

$$\delta(x) = \left(\frac{1}{2\pi iz}, \frac{1}{2\pi iz} \right)$$

dove z è un numero complesso di modulo unitario.

BIBLIOGRAFIA

- Claude Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë . Quantum mechanics vol.1. John Wiley & Sons.
- B.S. Chandrasekhar. Perché il vetro è trasparente. Il Saggiatore.
- Lev D. Landau, E. M. Lifshits. Fisica teorica vol.3 -Meccanica quantistica. Editori Riuniti.
- J. F. James. A student's guide to Fourier transforms. Cambridge.
- A. Caforio, A. Ferilli. Physica vol.3. Le Monnier.
- M. Cantelli. Percorsi di fisica vol.3. Cedam.
- N. Abbagnano, G. Foriero. Protagonisti e testi della filosofia. vol.3.
- R. Penrose. La strada che porta alla realtà. Rizzoli – par. 9.7 – pag.172.