APPENDICE

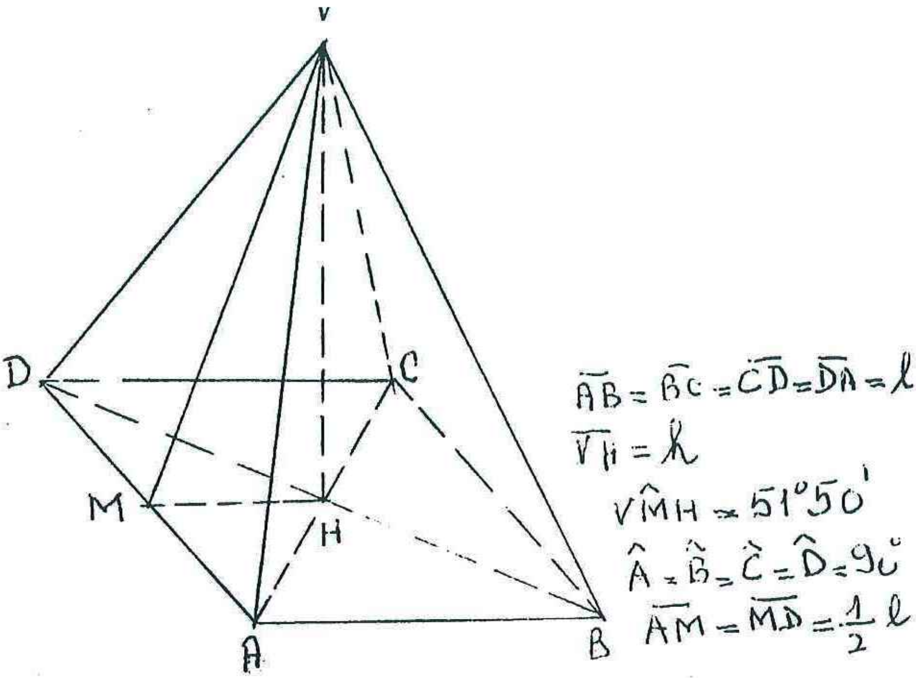


Fig. n. 1

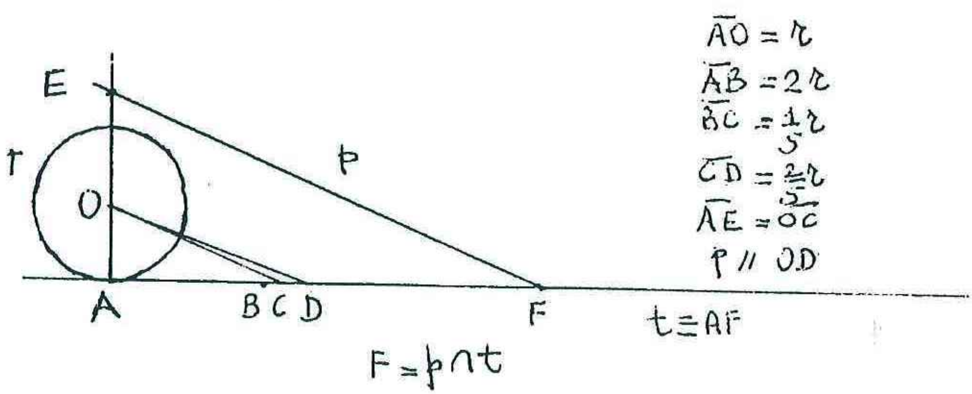

$\overline{AO} = r$
$\overline{AB} = 2r$
$\overline{BC} = \frac{1}{5}r$
$\overline{CD} = \frac{2}{5}r$
$\overline{AE} = \overline{OC}$
$p \parallel OD$
E
T
O
p
A
B C D
F
$t \equiv AF$
$F = p \cap t$

Fig. n. 2

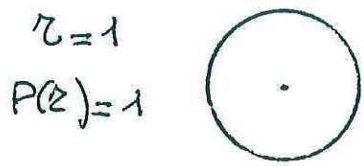


Fig. n. 3

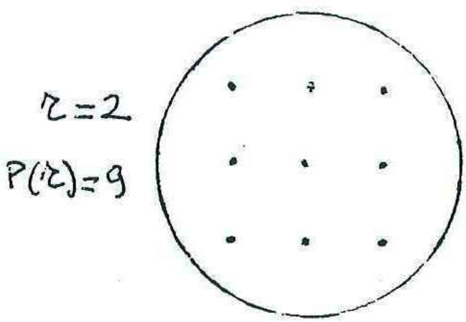


Fig. n. 4

$r = 4$
$P(r) = 45$

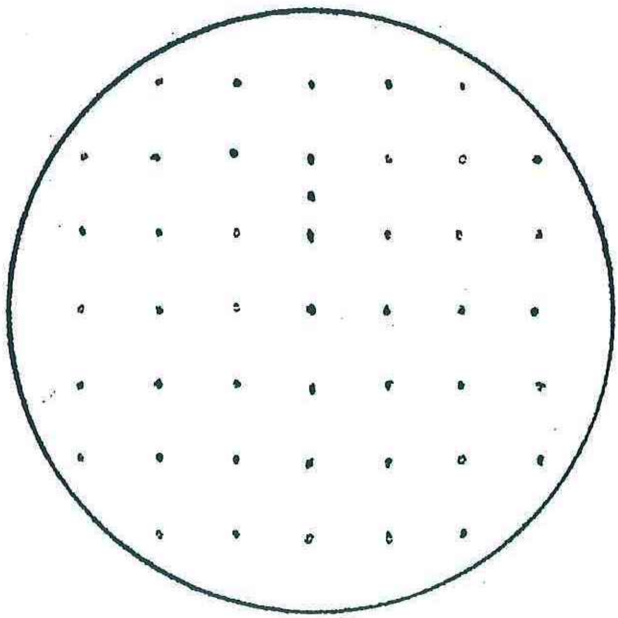


Fig. n. 5

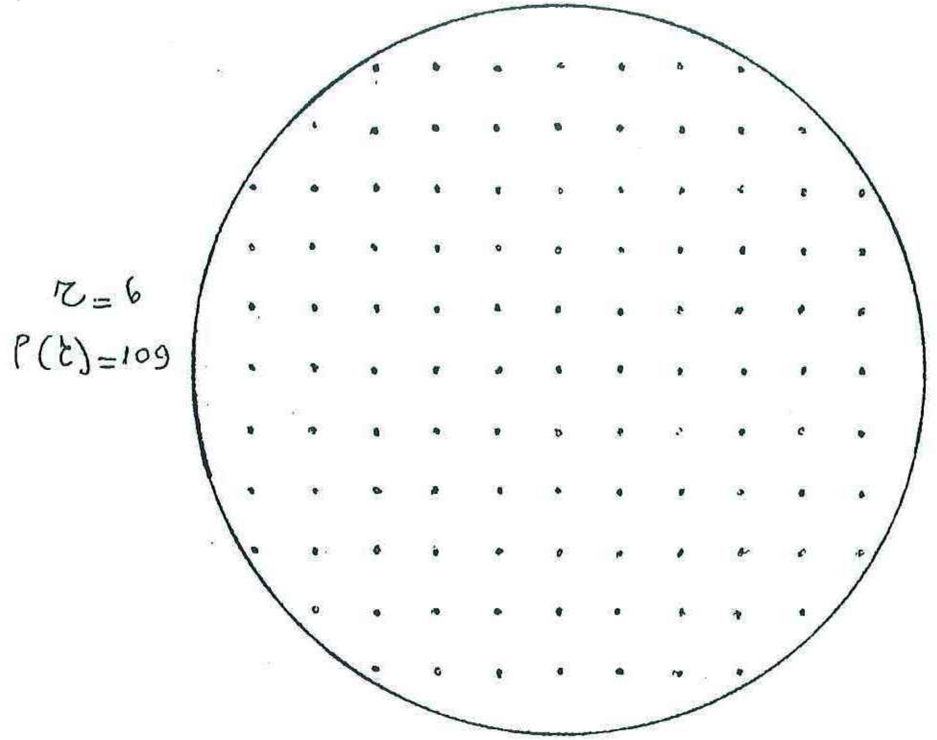


Fig. n. 6

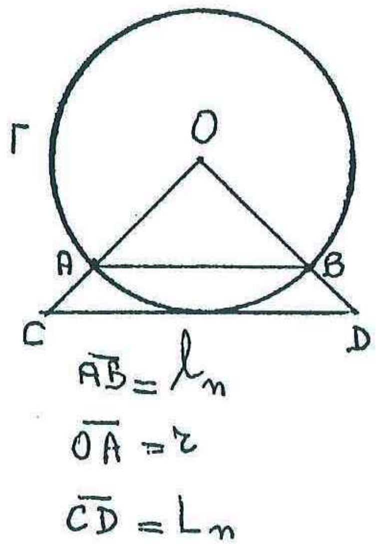


Fig. n. 7

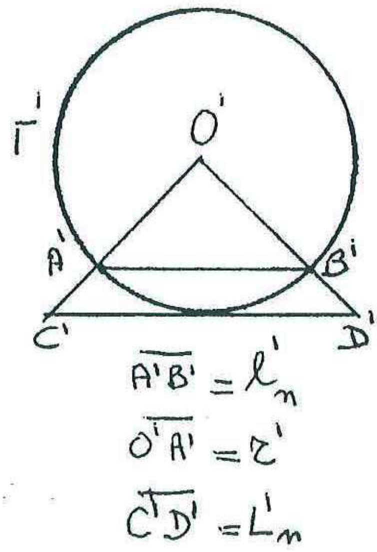


Fig. n. 8

La redazione dopo aver letto l'interessante articolo del prof. Ditta, incuriosita, ha deciso di intervistare il personaggio Π. Ne è nato un dialogo che fedelmente riportiamo.

La Redazione – Il mondo della matematica appare, ai profani, popolato da strani personaggi, ma tu sei il più strano di tutti perché sembri avere anche il dono dell'ubiquità(1). A scuola ti confondevamo con il più rassicurante 3,14 per poi scoprire che si trattava di una palese falsità. Insomma chi sei?

Π – Circolano intorno alla mia natura tante leggende metropolitane o come direste voi, nutriti di classica cultura, "myriai aloghiai(2)". In effetti sono normale, anzi archetipo della piatta normalità.

La Redazione – In cosa consiste questa tua pretesa normalità?

Π – Sono normale perché, visto da diverse angolature, mostro sempre la stessa faccia. La mia ossatura infinita non cambia forma.

La Redazione – Potresti essere più chiaro. Parli di punti di vista, di ossature, cosa vuoi dire?

Π – Per i vostri deboli cervelli, mi spiegherò con un esempio. Prendiamo il numero 1/3 = 0,3333...
L'ossatura, ovvero l'allineamento decimale, è composta dal solo numero 3 ripetuto infinite volte. Vi sembra un fatto **normale**? E gli altri nove numeri della base (0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9) perché non compaiono?

La Redazione - Veramente non sappiamo cosa dire

Π – Se poi cambiamo punto di vista, quindi la base, e utilizziamo la base 3, che fa uso delle sole cifre 0, 1, 2, allora 1/3 diventa 0,1 . L'ossatura si è ridotta al solo numero 1. Con la base 7 abbiamo 1/3 = 0,2222.... e in base 12, 1/3 = 0.4

La Redazione – Che confusione!

Π – Appunto, la mancanza di normalità pesa! Ed inoltre la vostra confusione, che non è quella del matematico, nasce dalla scuola dove non vi hanno insegnato a distinguere il numero dalla sua rappresentazione. Un fatto che nel paese che ha data i natali a Pirandello è certamente singolare.

La Redazione – Va bene ci hai convinto, anche se non comprendiamo come hai fatto a far cambiare "pelle" ad 1/3 che nella rappresentazione decimale ci appariva così "normale". Ma non ci hai ancora detto perché tu sei **normale**.

Π – Non vi crucciate, parafrasando un vostro simpatico poeta[3] di un secolo dove fui ignoto ai più, vi dirò: E' del matematico il fin la maraviglia / chi non sa far stupir vada alla striglia. Tornando alla mia normalità affermo che sempre tutte le cifre della base compaiono nella mia ossatura in perfetta casualità.

La Redazione – Non comprendiamo come questo fatto ti possa tanto inorgoglire.

Π – A voi tapini , figli putativi del monaco Bernardo di Chartres[4], questo fatto eclatante non vi suggerisce nulla, ma vi dico che nella mia ossatura sono contenuti i tesori letterari dell'umanità ed anche le vostre date di nascita. Il più grande libro mai scritto, La Divina Commedia, fa parte del mio codice genetico.

La Redazione – Dici cose inaudite ed inverosimili come i gradassi della letteratura di intrattenimento.

Π – Qualcuno mi dia il dì natale nella classica forma gg/mm/aaaa

La Redazione – 28/12/1942

Π – La stringa 28121942 compare nella mia ossatura dopo 16.439.131 cifre. E non è tutto. Perché la stessa serie di numeri la potete ritrovare per altre tre volte nei primi cento milioni di cifre[5].

La Redazione – D'accordo, ma come la mettiamo con La Commedia che i posteri chiamarono Divina?

Π – Quante sono le lettere dell'alfabeto?

La Redazione - 21

Π - Se scegliamo la base 21 allora ogni unità della mia ossatura rappresenta una lettera dell'alfabeto. Se vogliamo una qualsiasi parola di quattro lettere, dobbiamo scegliere la base 214, come ben sanno gli inventori di quelle tavolette rettangolari che incollate negli aggeggi a quattro ruote che tanto amate.

La Redazione – Incominciamo a capire, ma La Divina Commedia?

Π – Il Gran Libro è costituito da circa mezzo milione di caratteri, quindi se si sceglie come base per rappresentarmi il numero $21^{5.10^5}$ allora..........

La Redazione – Un elemento della base rappresenta l'intera Divina Commedia

Π – E' così! Prima di congedarmi vi confido che la redazione ha fatto, come si dice con un brutto anglicismo di derivazione giornalistica, un grosso scoop: i matematici, poveretti, non son ancora riusciti a dimostrare la mia normalità. Addio.

La Redazione – Grazie,non possiamo che concludere con le parole del sommo poeta:siamo"come quei che la cosa per nome/apprende ben, ma la sua quididate/veder non può se altri non la prome[6] "

1. **Π** compare, infatti, in diversi e distinti settori della matematica
2. innumerevoli sciocchezze
3. Giovan Battista Marino, poeta vissuto nel seicento
4. monaco medievale (XII secolo) che recitò una frase rimasta famosissima perché poi da tutti ripetuta in varie forme:"Noi siamo nani, ma stando sulle spalle di giganti possiamo vedere più lontano di loro".
5. consultate il sito www.angio.net/pi/bigpi.cgi per la data di nascita e il sito www.pi.nersc.gov per vedere se c'è il vostro nome, opportunamente codificato, nei primi quattro miliardi di cifre di **Π** .
6. Dante – Paradiso, XX, 91 - 93

ANGOLO DELLE OLIMPIADI

Sull'ultimo numero del " FIBONACCI ", uno degli otto poster di matematica[1] che, raccolti con cura dal prof. Barbara, fanno bella mostra di sé nell'aula magna del liceo Fardella, è comparso un curioso problema dall'accattivante titolo: "IL SEGRETO DEL PERIODO PARI". Vi si legge:

Se si scrive 1/7 in forma decimale, si ottiene:

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857\cdots$$

Cioè, lo sviluppo decimale è periodico ed il gruppo di 6 cifre 142857 si ripete all'infinito. Ci sono molte particolarità sul numero 142857, tra le quali quella che, se lo si scinde a metà formando i due numeri di 3 cifre 142 e 857, si ha la relazione 142 + 857 = 999. Ebbene, non è un caso. Considerate un numero PRIMO p e scrivetelo in forma decimale. La scrittura risulterà periodica, ed un certo gruppo di m cifre (dove m dipende da p) si ripeterà all'infinito. Supponete ulteriormente che m sia un numero pari, (si può dimostrare che questo accade per infiniti numeri primi p) e scindete a metà il numero di $m = 2n$ cifre che si ripete all'infinito, ottenendo due numeri A, B di n cifre ciascuno (contando anche eventuali zeri iniziali). Ebbene, si ha sempre A + B = 99999....9!

In effetti 1/17 = 0,0588235294117647.......... Il gruppo periodico 0588235294117647 , scisso nelle parti 05882352 e 94117647 e ricomposto mediante addizione dà

$$05882352 + 94117647 = 99999999$$

ed anche da 1/11 = 0,09......, che ha come periodo 09, segue 0 + 9 = 9. Sarà sempre vero? Si, infatti sia c il periodo ed m il numero di cifre del periodo stesso (nel caso di 1/7 $c = 142857$ ed $m = 6$) di una frazione a/b il cui denominatore b e 10 sono primi tra loro, allora si può scrivere:

[1] Il compianto prof. **Conti**, animatore fin dalla prima ora della pattuglia delle Olimpiadi di Matematica, ne fu autore e promotore.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{\left(10^{m}-1\right)}$$

Nel caso in cui *b* sia primo ed *m* pari ($m=2n$) si ha:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{\left(10^{m}-1\right)}=\frac{A\cdot 10^{n}+B}{\left(10^{m}-1\right)}$$

avendo scritto *c*, numero di $m=2n$ cifre, nella forma $A\cdot 10^n + B$, dove A e B sono numeri di *n* cifre. Poiché $10^m - 1 = (10^n - 1)(10^n + 1)$ possiamo scrivere:

$$\frac{a}{b}=\frac{A\cdot 10^{n}+B}{\left(10^{n}-1\right)\left(10^{n}+1\right)}$$

che può assumere la forma:

$$\frac{a\left(10^{n}+1\right)}{b}=\frac{A\cdot 10^{n}+B}{\left(10^{n}-1\right)} \qquad [1]$$

Il punto chiave della dimostrazione risiede nel fatto che *b* divide $10^n + 1$ e quindi il membro di sinistra dell'identità [1] è un numero intero. Come mai? Lascio al lettore la risposta. Quindi anche il membro di destra è un numero intero che riscriviamo come:

$$\frac{A\cdot 10^{n}+B}{\left(10^{n}-1\right)}=\frac{A(10^{n}-1)+A+B}{\left(10^{n}-1\right)}=A+\frac{A+B}{10^{n}-1}$$

Essendo A intero anche $(A + B)/(10^n + 1)$ lo è. Poniamo quindi:

$$\frac{A+B}{\left(10^{n}-1\right)}=l \quad ; \quad l\in N \qquad [2]$$

A è formato da n cifre come il numero $10^n - 1$ che, peraltro, è formato da una serie di 9. Quindi $A\leq 10^{n}-1$. Lo stesso discorso vale per il numero $B\leq 10^{n}-1$. Allora $A+B\leq 2\left(10^{n}-1\right)$. Ma la relazione

$$A + B = 2(10^n - 1)$$

è improponibile (perché ?) e quindi $A + B < 2(10^n - 1)$.

Dalla [2] si ottiene $A+B=l\left(10^{n}-1\right)$ dove l è un intero minore di 2. Quindi $l=1$. **A + B = 10ⁿ – 1 = 999….9.**

IL DOTTOR TRIG

La trigonometria di cui si fa a scuola un uso ristretto è d'ausilio in tanti problemi a prima vista assai intricati. Non si cita mai il fatto che il noto teorema di identità dei polinomi (due polinomi sono **formalmente** uguali se e solo se sono **funzionalmente** uguali) che lega il punta di vista algebrico – formale a quello analitico – funzionale, non vale per le espressioni polinomiali in $\sin\theta$ e $\cos\theta$. Infatti $\sin^2\theta$ e $1 - \cos^2\theta$ sono espressioni formalmente diverse della stessa funzione trigonometrica.
Un illuminante discussione su questo argomento si può trovare in un articolo di G.Prodi e V.Villani sulla rivista "Archimede" n. 4 – 1982. Si abbia la seguente equazione algebrica:

$$x=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} \qquad [3]$$

di cui si cercano le soluzioni x nell'intervallo chiuso [-2,2]. Seguire la via algebrica ci porterebbe a risolvere un'equazione di sesto grado che solo i metodi numerici possono dipanare. Entra, quindi, in azione il Dottor Trig. che suggerisce la sostituzione $x=2\cos t$ da cui si ottiene :

$$\sqrt{2+x}=2\cos\frac{t}{2};\quad \sqrt{2-\sqrt{2+x}}=2\sin\frac{t}{4}=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{4}\right)$$

ed ancora

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8}\right)$$

per cui la [3] diventa

$$\cos t=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8}\right)$$

e quindi

$$t=\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8}\quad ,\quad t=\frac{t}{8}-\frac{\pi}{4}$$

da cui $t=\frac{2\pi}{9}$, $t=-\frac{2\pi}{7}$ $\Rightarrow$ $x=2\cos\frac{2\pi}{9}$, $x=2\cos\frac{2\pi}{7}$.

La tecnica della sostituzione trigonometrica è utile anche in situazioni apparentemente assai lontane dalla trigonometria come si evince dal seguente problema usato nella fase di preparazione alle olimpiadi in USA:

Si considerino n numeri $a_1,a_2,\cdots,a_n$ tutti compresi nell'intervallo chiuso [-2,2] con la condizione che la loro somma sia nulla $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k=0\right)$ allora:

$$\left|a_1^3+a_2^3+a_3^3+......+a_n^3\right|\le 2n \qquad [4]$$

Sostituendo a_1 con $2\cos b_1$ e ... ... a_n con $2\cos b_n$ e ricordando che $\cos 3b=4\cos^3 b-3\cos b$ $\Rightarrow$ $2\cos 3b_k=a_k^3-6a_k$. Sommando otteniamo:

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos 3b_k=\sum_{k=1}^{n}a_k^3$$

ricordando che $\sum_{k=1}^{n}a_k=0$. Ed essendo il $\left|\cos 3b_k\right|\le 1$ si ha subito la [4].

Ed ancora, siano *a*, *b*, *c* numeri reali positivi tali che $a+b+c=abc$.
Trovare il minimo valore dell'espressione:

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{c^2}}$$

Ponendo $a=\tan x$, $b=\tan y$, $c=\tan z$, per numeri reali positivi *x*, *y*, *z* tali che $x+y+z=\pi$ si ha che

$$\tan x\cdot\tan y\cdot\tan z=\tan x+\tan y+\tan z \quad (\text{perché?})$$

ed allora:

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{c^2}}=\csc x+\csc y+csc z$$

Poiché la funzione $f(x)=\csc x$ è convessa nell'intervallo (0,π), si può applicare la nota disuguaglianza di Jensen ottenendo

$$\csc x+\csc y+\csc z \geq 3\csc\left(\frac{x+y+x}{3}\right)=3\csc\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

il risultato cercato. Infatti $2\sqrt{3}$ è il minimo valore che l'espressione proposta assume quando e solo quando $x=y=z=\frac{\pi}{3}$ e quindi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Negli ultimi due numeri 3 e 4 del " Fardella " si parlò della disuguaglianza:

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}A \qquad [5]$$

E' questa una relazione di grande importanza in trigonometria, quindi non possiamo esimerci da qualche altra considerazione:

I) Se si costruiscono tre triangoli equilateri sui lati del triangolo ABC (i cui lati misurano *a*, *b*, *c*), all'interno del triangolo stesso, i centri dei nuovi triangoli formano ancora un triangolo equilatero il cui lato misura:

$$\sqrt{\frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2-4A\sqrt{3}\right)}$$

II) La somma dei quadrati delle misure dei lati:

$$a^2+b^2+c^2=4A(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)$$

da cui si deduce che $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma \geq \sqrt{3}$.

III) Un'altra disuguaglianza, dovuta a F.Goldner, afferma

$$4A\sqrt{3} \leq \sqrt{3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)} \leq a^2+b^2+c^2$$

IV) Siano r, r_a, r_b, r_c le misure dei raggi dei cerchi inscritti ed exinscritti, allora

$$r(r_a + r_b + r_c) \geq A\sqrt{3}$$

V) La disuguaglianza [5] ammette generalizzazione. Se denotiamo con $a_1, a_2, \cdots, a_n$ le misure dei lati di un poligono regolare ed A la sua area, allora:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 4A\cot\frac{\pi}{n}$$

IL VETTORE DI LENZ

Nel moto kepleriano esiste oltre l'energia E ed il momento angolare $\vec{l}$, un'altra costante del moto, ignota ai programmi scolastici, detta vettore di LENZ, il cui modulo è

$$|\vec{N}| = \sqrt{(GMm)^2 + \frac{2El^2}{m}}$$

dove M = massa del sole; m = massa del pianeta; G = costante di gravitazione universale. Si può trovare una approfondita discussione sul vettore di Lenz negli" Appunti di Fisica Generale I " di E. Fabri – quarta parte - Università di Pisa. Il vettore giace nel piano del moto. Con una piccola modifica , possiamo costruire un nuovo vettore, il cui modulo uguaglia l'eccentricità, che indicheremo con la consueta lettera *e*, dell'orbita dell'oggetto celeste. Si ha:

$$e = \frac{|\vec{N}|}{GMm} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{G^2M^2m^3}} \qquad [6]$$

Si vede subito che se :

- $0 < e < 1 \Rightarrow E < 0 \Rightarrow$ l'orbita è ellittica;
- $e = 1 \Rightarrow E = 0 \Rightarrow$ l'orbita è parabolica;
- se $e > 1 \Rightarrow E > 0 \Rightarrow$ l'orbita è iperbolica.

Con l'uso di questo vettore si possono affrontare problemi di astronomia di una certa complessità. Ne citerò uno discusso in maniera informale in un corso di pedagogato. Un meteorite si avvicina alla Terra. Si pone l'inquietante domanda : la urterà?
I dati iniziali sono: m = massa del meteorite = $2{,}09 \cdot 10^9$ kg; v_0 =modulo velocità iniziale = 15,7 km/s lungo una direzione che forma un angolo di ampiezza θ_0 = 40° con la verticale; distanza dalla terra al momento dell'avvistamento $d = 6 \cdot 10^3$ km. Se colpisse la Terra l'effetto sarebbe devastante! Infatti la sua energia cinetica[2] sarebbe

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R+d} + \frac{GMm}{R} = 3{,}21 \cdot 10^{17} J$$

con M = massa della Terra; R = raggio della Terra. Un energia pari all'esplosione di $76{,}4 \cdot 10^6$ tonnellate di tritolo! L'energia per unità di massa ed il modulo del momento angolare per unità di massa sono:

$$E/m = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R+d} = 9{,}10 \cdot 10^7 J/kg$$

$$l/m = dv_0 \sin 40^\circ = 1{,}25 \cdot 10^{11} m^2 s^{-1} kg^{-1}$$

Quindi dalla [6] otteniamo $e = 4{,}35$. L'orbita del meteorite è un iperbole, la cui rappresentazione in coordinate polari è:

$$r = \frac{3{,}92 \cdot 10^7}{1 - 4{,}35\cos\theta} \qquad (3)$$

Il punto di massimo avvicinamento si avrà per $\theta = \pi$, per cui:

$$r_{\min} = 8{,}77 \cdot 10^6 m$$

maggiore del raggio terrestre di ben 946 km e la Terra sarà salva.

---

[2] Abbiamo trascurato la perdita di energia subita dal meteorite nell'attraversare l'atmosfera perché di scarsa rilevanza ai fini dell'eventuale distruttivo impatto.

[3] Ricordiamo che l'equazione di una conica in coordinate polari si scrive, nel nostro caso, così:

$$r = \frac{l^2 / GMm^2}{1 - e\cos\theta}$$

OLIMPIADI DI MATEMATICA 2004

Uno degli estensori di questa nota (E. Suppa) ha elaborato una soluzione, diversa da quella proposta dalla commissione, per il problema n. 6 assegnato alle Olimpiadi Nazionali di Matematica che si sono tenute a Cesenatico nella prima decade del mese di maggio del corrente anno. Il testo recita:

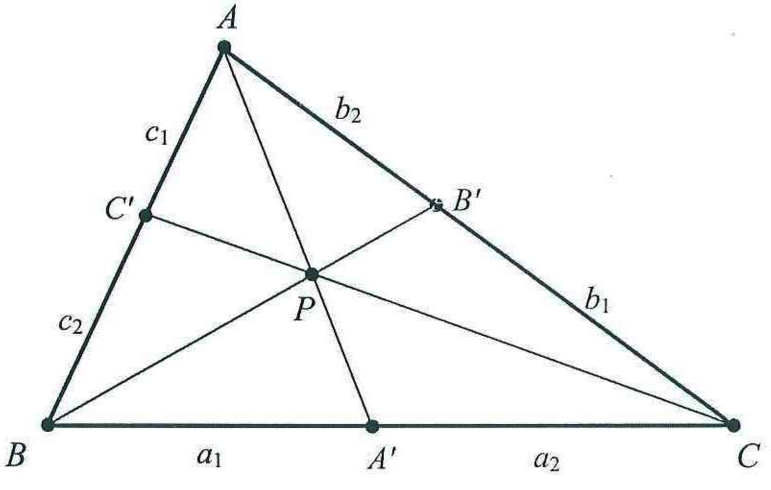
Sia P un punto interno ad un triangolo ABC. Le rette AP, BP, CP intersecano i lati di ABC rispettivamente in A', B', C'. Posto

$$x = \frac{AP}{PA'}, \quad y = \frac{BP}{PB'}, \quad z = \frac{CP}{PC'}$$

dimostrare che $xyz = x + y + z + 2$.

La **Soluzione** del prof. **Suppa** è:

Sia dato il triangolo ABC .



Per il teorema di **Menelao** applicato a

- $AA'B$: $$x\cdot\frac{a_2}{a}\cdot\frac{c_2}{c_1}=1 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{(a_1+a_2)c_1}{a_2c_2} \qquad [1]$$
- $BB'C$: $$y\cdot\frac{b_2}{b}\cdot\frac{a_2}{a_1}=1 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{(b_1+b_2)a_1}{b_2a_2} \qquad [2]$$
- ACC': $$z\cdot\frac{c_2}{c}\cdot\frac{b_2}{b_1}=1 \quad\Rightarrow\quad z=\frac{(c_1+c_2)b_1}{c_2b_2} \qquad [3]$$

Per il teorema di **Ceva** applicato ad ABC:

$$\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{c_1}{c_2}=1 \quad\Rightarrow\quad a_1b_1c_1=a_2b_2c_2 \qquad [4]$$

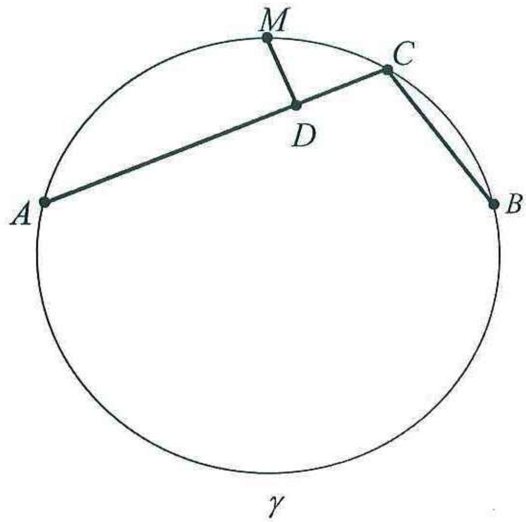
Da [1], [2], [3], [4] si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&xyz-x-y-z-2=\\
&=\frac{(a_1+a_2)c_1}{a_2c_2}\cdot\frac{(b_1+b_2)a_1}{b_2a_2}\cdot\frac{(c_1+c_2)b_1}{c_2b_2}-\frac{(a_1+a_2)c_1}{a_2c_2}-\frac{(b_1+b_2)a_1}{b_2a_2}-\frac{(c_1+c_2)b_1}{c_2b_2}-2=\\
&=\frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)-(a_1+a_2)b_2c_1-(b_1+b_2)a_1c_2-(c_1+c_2)a_2b_1}{a_2b_2c_2}-2=\\
&=\frac{a_1b_1c_1+a_2b_2c_2-2a_2b_2c_2}{a_2b_2c_2}=\frac{a_1b_1c_1-a_2b_2c_2}{a_2b_2c_2}=0
\end{aligned}
$$

ARCHIMEDE STUPISCE ANCORA

I matematici arabi attribuirono ad Archimede, che gli antichi chiamarono l'Omero della Geometria, il seguente teorema[4]:

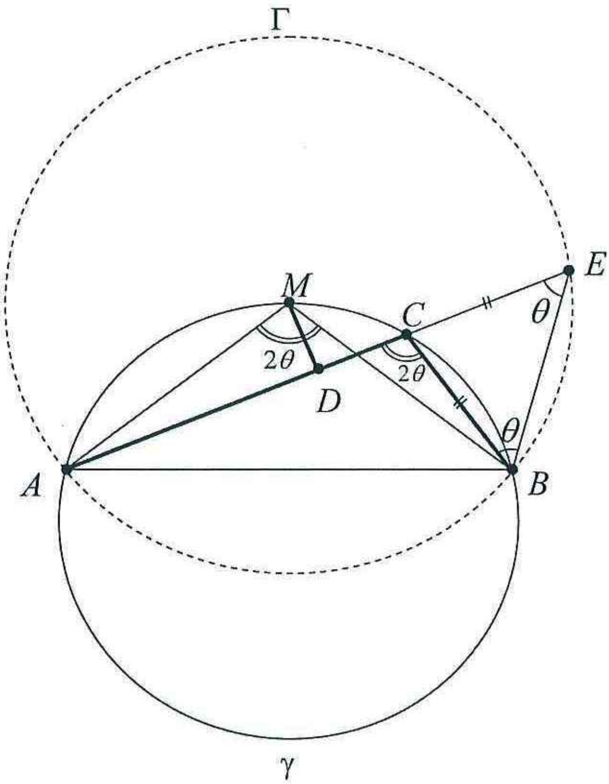
Teorema della corda spezzata. Sia M il punto medio dell'arco AB di un cerchio γ. Sia C un generico punto, diverso da M, sull'arco AMD e sia D il piede della perpendicolare condotta da M sulla maggiore delle due corde AC e BC. Allora D biseca la poligonale ACB ossia $AD = DC + CB$.



Esistono moltissime dimostrazioni di questo teorema e in questa nota ne riporteremo tre. La prima, molto simile ad una dimostrazione data da Archimede, è tratta dal libro di R. Honsberger, Episodes in nineteenth and twentieth century euclidean geometry ; la seconda è dovuta a Gregg Patruno di New York (quando era uno studente di scuola superiore); la terza è stata trovata da una studentessa ungherese, Katalin Bognáv, nel 1991 all'età di 15 anni.

[4] Carl Boyer - Storia della matematica, pag 160

PRIMA DIMOSTRAZIONE. (Ross Honsberger)



Prolunghiamo AC di un segmento $CE = CB$. Il triangolo CEB è isoscele e quindi ha gli angoli alla base uguali

$$C\widehat{B}E = C\widehat{E}B = \theta$$

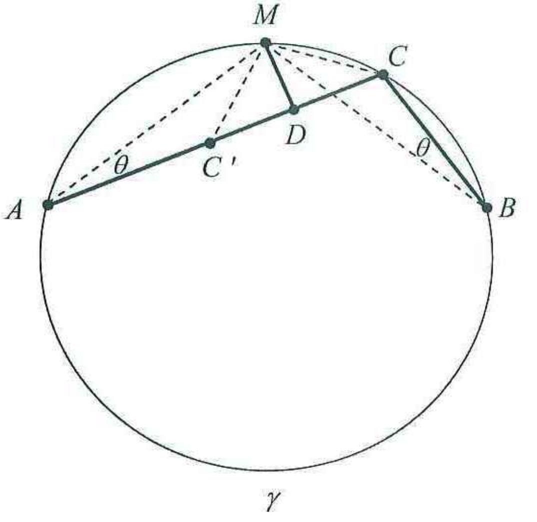
Per il teorema dell'angolo esterno abbiamo

$$A\widehat{M}B = A\widehat{C}B = 2\theta$$

per cui M è il centro della circonferenza Γ passante per i punti A, B, E (M appartiene all'asse di AB e *vede* AB sotto un angolo di ampiezza 2θ). Ne discende che D è il punto medio della corda AF e allora:

$$AD = DE = DC + CE = DC + CB$$

SECONDA DIMOSTRAZIONE. (Gregg Patruno)



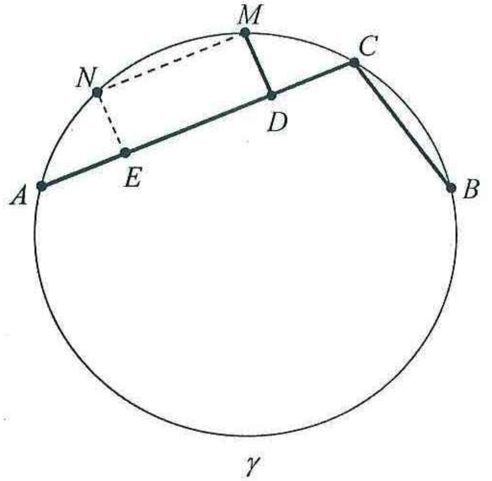
Supponiamo che $AC > CB$. Ovviamente risulta $MA = MB$ in quanto M biseca l'arco AB. Inoltre

$$M\hat{A}C = M\hat{B}C = \theta$$

in quanto angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda MC. Prendiamo su AC un punto C' tale che $AC' = CB$. Dall'uguaglianza dei triangoli AMC' e MBC consegue che $MC' = MC$. Ma allora il triangolo $MC'C$ è isoscele sulla base BC e quindi MD oltre che altezza è anche mediana, ossia $C'D = DC$. Pertanto risulta:

$$AD = AC' + C'D = DC + CB$$

TERZA DIMOSTRAZIONE . (Katalin Bognáv)



Tracciamo la parallela ad AC passante per M ed indichiamo con N il punto in cui questa incontra la circonferenza γ. Dalla simmetria della figura abbiamo $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NC}$ ed $AE = DC$. Dato che $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ ne segue che

$$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{CB} \quad \Rightarrow \quad MN = CB$$

ed allora:

$$AD = AE + ED = AE + MN = DC + CB$$

Preferiamo senza dubbio la terza dimostrazione per l'eleganza e la soave bellezza di quel tratto di penna – il segmento MN – che tutto risolve.

ANTONINO GENTILE – ERCOLE SUPPA