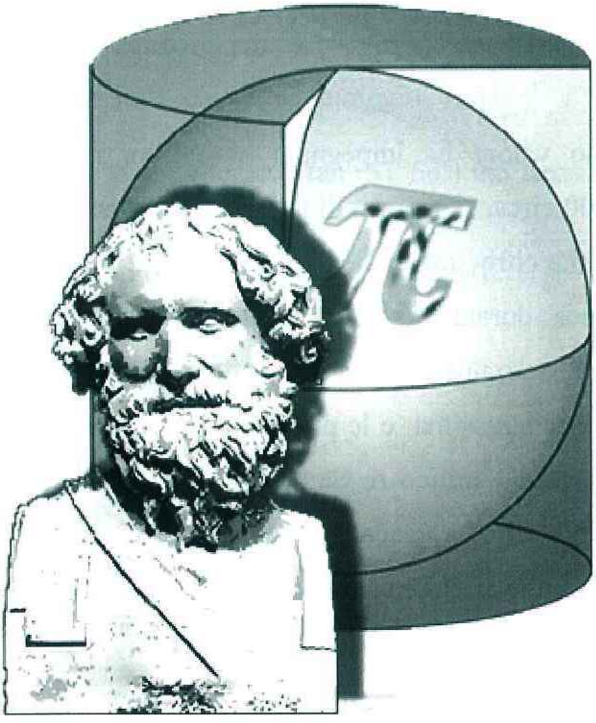

LA COSTANTE CICLOMETRICA

ITA NOBILISSIMA GRACIAE CIVITAS, QUONDAM VERO ETIAM DOCTISSIMA, SUI CIVIS UNIUS ACUTISSIMI MONUMENTUM IGNORASSET, NISI AB HOMINE ARPINATE DIDICISSET

Cicerone dopo aver scoperto la tomba di Archimede

La costante ciclometria, π , è una delle più famose che si conoscano e rappresenta il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza rettificata e il suo diametro.

Il calcolo del suo valore ha impegnato moltissimi matematici anche perché, fino al 1700 circa, si sperava di trovare che π fosse decimale finito o, al più , con infinite cifre , razionale.

Da qui la ricerca durata , almeno , due millenni per individuare procedimenti che dessero una risposta al quesito: Che tipo di numero è π ?

La sua comparsa è remotissima e le prime notizie ufficiali si devono alla Bibbia dove si narra del mitico re Salomone che si fece costruire una vasca circolare. Per l'uso di π fu scelto il valore intero 3.

E' questo è il valore che artisti e tecnici caldei, assiro-babilonesi, egiziani, attribuirono a π. Si ha notizia, anche, della proposta fatta dai cinesi e accolta dagli egiziani, di un valore più "raffinato" di $\pi : \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,160493827...$ e del valore, pure, di $\sqrt{10} = 3,16227766...$ più grossolano del primo. Anche se detti valori sono approssimati per eccesso, tuttavia , sono preferibili a tre. Il valore esatto di π sino a dieci cifre decimali è: 3,1415926535... e pel quale nei calcoli scolastici, come tutti sanno, si adotta solitamente il valore 3,14 approssimato per difetto a meno di $\frac{1}{100}$.

Gli egiziani scoprirono che, costruendo le loro piramidi con facce inclinate di 51°50', il rapporto fra il perimetro e l'altezza uguagliava il rapporto fra una circonferenza rettificata e il suo raggio, ossia:

$\frac{4.lato}{altezza} = \frac{c}{r} = 2\pi$ ove l'altezza è tan (51°50') 0,5 lato= 0,63614785 lato e

sostituendo nella precedente: $\frac{4.lato}{altezza} = 6{,}2878\ldots = \frac{c}{r}$ (vedi App. Fig.1)

$\overline{AB} = l$

$\overline{VH} = h$

$V\hat{M}H = 51°50'$

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$

$\overline{AM} = \overline{MD} = \overline{MH}$

I procedimenti adottati per il calcolo di π sono sia di tipo empirico, sia di tipo scientifico.

A prescindere dalla sequenza cronologica degli avvenimenti, oltre ai pecedenti, il valore di π suggerito da Metius è $\frac{355}{113}$ e supera a meno di $\frac{3}{10^7}$ quello effettivo; alcuni procedimenti si basano sui luoghi geometrici come la quadratrice di Dinostrato (leggasi a proposito il bellissimo articolo del Prof. Giovannelli apparso sul n. 1 del "Fardella"); diverse le costruzioni geometriche approssimate e fra queste, la più semplice, la rettificazione della circonferenza secondo Specht che riporto in appendice (Fig.2).

Sia Γ una circonferenza di raggio $\overline{OA} = r$ e t la tangente in A; si riporti su t un segmento $\overline{AB} = 2r$ e adiacente ad esso un segmento $\overline{BC} = \frac{1}{5}r$ e di seguito un segmento $\overline{CD} = \frac{2}{5}r$.

Sul prolungamento del diametro passante per A e O, sempre sullo stesso semipiano, di origine t, contenente la circonferenza Γ, si prenda un punto E tale che $\overline{AE} = \overline{OC}$ indi si conduca per E la parallela p alla retta OD; sia $F = p \cap t$.

Dalla similitudine dei triangoli EAF, OAD, si ricava:

AF:AD= AE:AO da cui

(°) $AF = \frac{AD.AE}{AO}$; sostituendo in tale uguaglianza:

$\overline{AD} = \frac{13}{5}r$, $\overline{\mathrm{AE}} = \frac{\sqrt{146}}{5}r$ si ottiene:

$\overline{AF} = \frac{13}{25}\sqrt{146}r$

Poiché $\frac{\overline{AF}}{2r} = \frac{13}{50}\sqrt{146} = 3{,}141591953...$

Il segmento AF rappresenta la lunghezza della circonferenza rettificata a meno di $\frac{1}{10^5}$.

Non voglio chiudere la presentazione dei processi proposti e ideati per la determinazione del valore di π secondo metodi quasi empirici se non accenno alla ricerca effettuata dal "Princeps Mathematicorum" GAUSS.

Per la presentazione di tale ricerca basta quadrettare un foglio di carta, tracciare alcune circonferenze con centro nel vertice di un quadrato di raggio intero e assumere come segmento unitario il lato del quadrato della stessa quadrettatura.

Nel nostro caso riferiremo i dati relativi alle circonferenze di raggi:

R = {1, 2, 4, 6, 10, 20, 30, 100, 200, 300} ma traccerò soltanto i grafici relativi alle circonferenze di raggi:

R = {1, 2, 4, 6} ciò al fine di evitare tediosa prolissità; farò la conta di tutti i punti (vertici dei quadrati che sono stati preventivamente tracciati) a distanza dal centro minore del raggio della circonferenza e verificherò che detti punti uguagliano il numero dei quadrati il cui vertice basso sinistro sia interno alla circonferenza suddetta.

Se ora indico con r il raggio della circonferenza, con P (r) e Q_s (r) il numero dei punti interni e i quadrati di cui sopra, procedo alla conta (Vedi App. fig. 3,4,5,6).

Ora se indico con S(r) l'area della superficie dei quadrati compresi oppure omessi, che sono tagliati dalla circonferenza, sicuramente risulta:

1) $|P(r)-\pi r^2| \leq S(r)$:

S(r) risulta, al massimo, pari a tutti i quadrati compresi nella corona circolare di raggi:

r-d, r+d ove d= $\sqrt{2}$ è la misura della diagonale di ogni quadrato.

Alla luce di quanto precisato, perciò, sarà:

$S(r) \leq \pi\,[(r+d)^2 - (r-d)^2] = 4\sqrt{2}\,\pi\, r$

Quindi la 1) si può scrivere: $|P(r) - \pi\, r^2| \leq 4\sqrt{2}\, r\,\pi$

e, dividendo ambo i membri per r^2, la precedente relazione diventa:

$|P(r)/r^2 - \pi| \leq 4\sqrt{2}\,\pi/r$ e infine

$\lim_{r,\infty} |P(r)/r^2 - \pi| = 0$ da cui il bellissimo risultato

$\pi = \lim_{r,\infty} P(r)/r^2$

Tale risultato suggerisce il calcolo del valore di π per approssimazione; all'uopo riportiamo i dati conseguiti (e ampliati) nella seguente tabella:

r	1	2	4	6	10	20	30	100	200	300
r^2	1	4	16	36	100	400	900	10000	40000	90000
P(r)	1	9	45	109	317	1257	2821	31417	125629	282697
$\pi = \frac{P(r)}{r^2}$	1	2,25	2,81	3,0277	3,17	3,1425	3,134	3,1417	3,140725	3,14107778

N.B. "I dati relativi a R = {10, 20, 30, 100, 200, 300} provengono da altra fonte."

Per quanto riguarda il calcolo di π per via scientifica, troviamo una miriade di proposte ma la prima documentata (la prima in assoluto , ma non documentata è dovuta ad Anassagora) è doveroso menzionarla.

Si deve all'Omero della geometria:il siculo Archimede ed è fondata sulle proprietà delle grandezze contigue.

Teorema I

"I perimetri p_n *e* P_n dei poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti, rispettivamente, a una circonferenza Γ, sono classi di grandezze contigue".

Dimostrazione:

Sia DC tangente a una circonferenza Γ di centro O e raggio r (vedi App. Fig. 7)

sia $\overline{DM} = \overline{MC}, \overline{AB} = l_n$

essendo A, B le intersezioni fra i segmenti OD, OC con la Γ ed ln il lato del poligono regolare inscritto di n lati, $\overline{DC} = L_n$ il lato del poligono regolare circoscritto di n lati ($n \geq 3$).

E' evidente che:

$$p_n : P_n = \overline{CO} : \overline{AO} = \text{ e anche}$$

1) $(P_n - p_n) : p_n = (\overline{CO} - \overline{AO}) : \overline{AO}$ e ancora

$$(P_n - p_n) : p_n = 8(\overline{CO} - \overline{AO}) : 8\overline{AO}$$

ma $8\overline{AO} = 4(2r) = P_4$ e per n>4 risulta

$$p_n < P_4.$$

Per tale motivo dalla 1) si deduce che:

(2) $(P_n - p_n) : p_n < 8(\overline{CO} - \overline{AO})$.

D'altronde dal triangolo MOC, si deduce che:

$\overline{CM} > \overline{CO} - \overline{OM} = \overline{CO} - \overline{AO}$ quindi

$8(\overline{CO} - \overline{AO}) < 8\overline{CM} = 4\overline{CD}$

per cui, scegliendo $\overline{CD} < \varepsilon/4$ (ε reale, positivo, piccolo a piacere), la (2) si può scrivere:

$P_n - p_n < 8\,(\overline{CO} - \overline{AO}) < 8\,\overline{CM} = 4\,\overline{CD} < \varepsilon$

Quanto ottenuto significa che P_n, p_n rappresentano classi di grandezze contigue e, di conseguenza esiste un unico elemento di separazione: la circonferenza Γ; e ciò è deducibile dal postulato

$p_n < C < P_n \; con \; n \geq 3$.

Teorema 2

Due circonferenze C, C^1 stanno fra loro come i rispettivi raggi.

Dimostrazione.

Sappiamo che si può scrivere:

$p_n : p_n^1 = r : r^1 \;\; e \;\; P_n : P_n^1 = r : r^1$ da cui

ponendo $r : r^1 = K$, si deducono le relazioni

$p_n = \mathrm{K}\; p_n^1$ e $P_n = KP_n^1$ (o)

inserire le figure 7 e 8

ma

$p_n < C < p_n^1$ e $p^1{}_n < C^1 < p_n^1$ (*);

se moltiplichiamo per K i termini della seconda diseguaglianza, otteniamo

$\mathrm{K}\,p_n^1 < \mathrm{K}C^1 < \mathrm{K}\,P_n^1$ la quale tenendo conto della (o), si può scrivere:

$p_n < KC^1 < P_n$ e poiché è anche $p_n < C < P_n$ per l'unicità dell'elemento di separazione di due classi di grandezze contigue, si deduce che:

$KC^1 = C$ e poiché $K = \frac{r}{r^1}$ si conclude che:

$\frac{C^1}{r^1} = \frac{C}{r}$ o, ciò che è lo stesso

$$\frac{C^1}{2r^1} = \frac{C}{2r} = \cos\tan te = \pi$$

Tale risultato può essere conseguito, molto elegantemente, per via trigonometrica; infatti, posto nelle figure precedenti:

$C\hat{O}D = A\hat{O}B = \frac{2\pi}{n}$ (ove 2π rappresenta la misura in radianti dell'angolo giro)

si ricavano i valori:

$$\overline{CD} = L_n = 2\overline{OM}tg\frac{\pi}{n} = 2rtg\frac{\pi}{n}$$

$\overline{AB} = l_n = 2\overline{AO}sen\frac{\pi}{n} = 2rsen\frac{\pi}{n}$ e quindi

$$P_n = nL_n = 2rntg\frac{\pi}{n}$$

$$p_n = nl_n = 2rnsen\frac{\pi}{n}$$

Passando ai limiti, infine, si ottiene:

$$\lim_{n,\infty} P_n = \lim_{n,\infty} nL_n = 2\pi r$$
$$\lim_{n,\infty} p_n = \lim_{n,\infty} nl_n = 2\pi r$$

Pertanto le due classi di perimetri hanno lo stesso limite e quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{n,\infty} P_n = \lim_{n,\infty} p_n = 2\pi r = C \quad \textit{da cui}$$
$$\frac{C}{2r} = \pi$$

Ecco la giustificazione alla corsa per il calcolo di π.

Archimede è stato l'antesignano dei ricercatori di un indirizzo scientifico per il calcolo di π e seguì il processo che ne porta al calcolo approssimato considerando la circonferenza come elemento di separazione delle classi contigue formate dai perimetri inscritti e circoscritti alla circonferenza stessa, dei poligoni regolari di n lati.

Calcolò , allora , le misure dei perimetri dei poligoni in questione con un numero dei lati che vanno da 3 a 96 e trovò:

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{C}{2r} = \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

La tenacia mostrata dai matematici nel calcolo di π era giustificata dal fatto,come fu detto nell'introduzione, che essi speravano di trovare per π un numero razionale (meglio se finito).

Lo sviluppo del calcolo "sublime" e le sue applicazioni alle serie ha dato luogo a una miriade di calcoli approssimati di π; gli sviluppi in serie a cui mi riferisco sono:

$$f(x)=f(x_o)+\frac{x-x_o}{1!}f'(x_o)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_o)+\frac{(x-x_o)^3}{3!}f'''(x_o)+$$
$$+.....\frac{(x-x_o)^n}{n!}f^n(x_o)+R_n$$

detto sviluppo in serie di f(x) secondo Taylor nell'intorno di $x=x_0$ ed

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+....f^n(0)\frac{x^n}{n!}+R_n$$

detto sviluppo in serie di f(x) secondo Mac Laurin in un intorno di x=0.

Per una prima applicazione degli sviluppi in serie consideriamo la funzione f(x) = arctan x della quale è: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

e poiché detta derivata è definita e continua in x=0 possiamo considerare il suo sviluppo in serie secondo Mac Laurin:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8+....+(-1)^n x^{2n}+...=\sum_{n=o}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

che rappresenta una serie geometrica di ragione $-x^2$ e risulta convergente per $-1 < \mathrm{x} < 1$; ora

$$\int_0^x f^1(x)dx=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\left[arctgx\right]_0^x=\int_0^x(1-x^2+x^4-x^6+x^8....)dx=$$
$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+....=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

tale serie risulta convergente anche per x=1 e allora posto nel precedente sviluppo x=1 si ricava:

$$arctg1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} .... = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1};$$

detta serie è chiamata serie di Leibniz.

Tale serie, però, è poco adatta per il calcolo di π in quanto converge molto lentamente; Machin ha modificato la serie aumentandone la velocità di convergenza e usò lo sviluppo:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left\{\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1).5^{2n+1}}\right\} +$$
$$-\left\{\frac{1}{1.239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - .... + \frac{(-1)^n}{(2n+1).239^{2n+1}}\right\}$$

serie che, effettivamente, converge molto rapidamente.

Con questa serie Shanks ha calcolato π con 707 cifre decimali di cui 527 corrette.

Eulero, che ha dominato il pensiero matematico in tutti i campi, è partito dalla formula trigonometrica:

$tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha . tg\beta}$ e poiché tale uguaglianza è verificata per

$tg\,\alpha = \dfrac{1}{2},\ tg\,\beta = \dfrac{1}{3}$ *quando* $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$ *ottenne*:

dato che $tg\,\dfrac{\pi}{4} = 1$

$\dfrac{\pi}{4} = \alpha + \beta = arctg\,\dfrac{1}{2} + arctg\,\dfrac{1}{3}$ *e posto*

$$arctg\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ldots.$$

$$arctg\,\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \ldots$$

risulta, sommando membro a membro:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}\right) + \ldots$$

che è una serie a segni alterni e converge molto rapidamente.

Con tale serie furono calcolate ben 6600 cifre decimali (vedi Zwirner – Scaglianti: Analisi matematica).

Sempre Eulero, molto abile a maneggiare le serie, riuscì a determinare valori di π attraverso sviluppi tali da sbalordire i suoi colleghi; quelli più noti sono:

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+....+\frac{1}{n^2}+...=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...+\frac{1}{(2n-1)^2}+...=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+...=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Un'altra serie molto utile, sviluppata sempre sulle orme di quelle di Eulero, è la seguente:

$$\frac{\pi}{4}=4arctg\frac{1}{5}-arctg\frac{1}{239}=$$

$$=\frac{4}{5}\left[1-\frac{4}{3.100}+\frac{4^2}{5.100^2}-\frac{4^3}{7.100^3}+....+\frac{(-1)^n.4^n}{(2n+1).100^n}\right]+$$

$$-\frac{1}{239}\left[1-\frac{1}{3.57121}+\frac{1}{5.57121^2}-\frac{1}{7.57121^3}+....+\frac{(-1)^n}{(2n+1).57121^n}....\right]$$

A tale punto mi sento assalito da un senso di smarrimento; indeciso se lasciare gli sviluppi di Eulero sull'esposizione dei calcoli di $\frac{\pi^2}{6},\frac{\pi^2}{8},\frac{\pi^2}{12}$ con la semplice menzione oppure mostrare magari la dimostrazione di un risultato e certe relazioni fra di loro.

La seconda iniziativa, ossia la dimostrazione, non la ritengo coerente con la "elementarità" che mi sono proposto di dare alla presente esposizione.

D'altra parte, però, il ricordare, a ogni piè sospinto, l'intraprendenza di Eulero, ,chiamato dai contemporanei "l'analisi incarnata , la sua profonda competenza mostrata nel manipolare le serie, potrebbero invogliare qualche lettore a farsi cavia al fine di prendere coscienza della misura della nomea del grande matematico.

Un ulteriore contributo, favorevole alla 2^ iniziativa,dopo proficue discussioni , è venuto da parte di un componente del comitato di redazione del Fardella: il Prof. Antonino Gentile , mio sodale collega al Liceo "V.FARDELLA " negli anni 80.

Allora ecco la dimostrazione dello sviluppo che porta al calcolo di $\frac{\pi^2}{8}$;

"**Alea iacta esto**"!

All'uopo si può partire col proporre il calcolo di

$\int_0^t \frac{sen^{-1}t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ove si presume $1-t^2>0$;

tale integrale può essere risolto secondo due metodi:

1°) secondo il metodo dell'integrazione per parti per cui

$$\int_0^t \frac{sen^{-1}t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^t sen^{-1}t\ d\ sen^{-1}t = \frac{1}{2}\left[\left(sen^{-1}t\right)^2\right]_0^t :$$

come è facile constatare l'integrale dato è generalizzato ed esiste per $t \Rightarrow 1^-$ quindi si può scrivere:

$$\int_0^1 \frac{sen^{-1}t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{t,1^-} \int_0^t \frac{sen^{-1}t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\left[\left(sen^{-1}t\right)^2\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

2°)Applicando il metodo per scomposizione in somma, basta sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione $sen^{-1}t$:

$$sen^{-1}t = arcsent = t + \frac{1}{2}.\frac{t^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{t^5}{5} + ... +$$
$$+\frac{1.3.5\ ......(2n-1)}{2.4.6\ ...(2n)}\frac{t^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

e perciò dividendo ambo i membri per $\sqrt{1-t^2}$ si ottiene:

$$\frac{sen^{-1}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{2.3}\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1.3}{2.4.5} + ... \frac{1.3.5.....(2n-1)t^{2n+1}}{2.4.6.....(2n)(2n+1)} + ...$$

poiché

$\dfrac{sen^{-1}t}{\sqrt{1-t^2}}$ è integrabile in senso generalizzato, integrando ambo i membri della precedente uguaglianza nell'intervallo [0,1] si può scrivere:

$$\int_0^1 \frac{sen^{-1}t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{t^3dt}{2.3\sqrt{1-t^2}} + \frac{1.3}{2.4.5}\int_0^1 \frac{t^5dt}{\sqrt{1-t^2}} ..... + \qquad (*)$$
$$+\frac{1.3.5.(2n-1)}{2.4.6.(2n)(2n+1)}\int_0^1 \frac{t^{2n+1}dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Per il calcolo degli integrali a 2° membro conviene determinare una formula di ricorrenza.Poniamo quindi:

$$I_{n+2} = \int \frac{t^{n+2}dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

e dopo qualche manipolazione applichiamo il metodo di integrazione per parti :

$$\int\frac{t^{n+2}dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{t^{n+1}.tdt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int t^{n+1}d\sqrt{1-t^2}=-\left\{t^{n+1}\sqrt{1-t^2}-\int\sqrt{1-t^2}\,dt^{n+1}\right\}=$$

$$=-t^{n+1}\sqrt{1-t^2}+(n+1)\int\sqrt{1-t^2}\;t^n dt=$$

$$=(n+1)\left[\int\frac{t^n dt}{\sqrt{1-t^2}}-\int\frac{t^{n+2}dt}{\sqrt{1-t^2}}\right]-t^{n+1}\sqrt{1-t^2}.$$

Sostituendo $\int\frac{t^n\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=I_n$ la precedente uguaglianza si può scrivere:

$I_{n+2}=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}-t^{n+1}\sqrt{1-t^2}$ onde

$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n-t^{n+1}\sqrt{1-t^2}$ e integrando nell'intervallo [0,1]

$(n+2)\left[I_{n+2}\right]_0^1=(n+1)\left[I_n\right]_0^1$ ed infine

$$\left[I_{n+2}\right]_0^1=\frac{n+1}{n+2}\left[I_n\right]_0^1$$

N.B. Dallo sviluppo si nota che servono I_n con n dispari.

Calcoliamo ora:

$$\left[I_1\right]_0^1=\int_0^1\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=1,\quad \left[I_3\right]_0^1=\frac{2}{3}:\left[I_5\right]_0^1=\frac{4}{5}\left[I_3\right]_0^1=\frac{4.2}{5.3}$$

$\left[I_7\right]_0^1=\frac{6}{7}\left[I_5\right]_0^1=\frac{6.4.2}{7.5.3}$ e per induzione la (*) diventa

$$\int_0^1 \frac{sen^{-1} dt}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2.3}.\frac{2}{3} + \frac{1.3.4}{2.4.5}.\frac{2}{5.3} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}.\frac{6.4.2}{7.5.3} + \ldots. =$$

$$= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots. =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Altra magia! Consideriamo

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots.$ e manipolando detta uguaglianza si può anche scrivere:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\right] + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots.\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots. + \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

e riducendo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Si noti, infine, e questo sarà l'ultimo esibizionismo, che se:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots. + \frac{1}{n^2} + \ldots. = \frac{\pi^2}{6} \quad e$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots. + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

sottraendo la 2^ uguaglianza dalla 1^ si ricava:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24} =$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots.. + \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

Riassumendo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

Sorvoliamo sull'esposizione di altri processi per calcolare il rapporto $\frac{C}{2r}$ perché con l'avvento degli elaboratori elettronici non c'è più "limite" per determinare il numero delle cifre decimali di π; basti pensare che nel 1995 due giapponesi hanno calcolato π con alcuni miliardi di cifre decimali.

Lo sforzo, naturalmente, non tendeva più a dimostrare che π fosse un numero razionale in quanto:

1) nel 1770 il Lambert ne dimostrò l'irrazionalità;

2) nei primi decenni del 1800 il Legendre dimostrò la irrazionalità di π^2;

3) nel 1947 Niven ne dimostrò, per falsa posizione, l'irrazionalità (vedasi Fardella, articolo del prof. Giovannelli a pag. 7 del n. 2);

4) sin dal 1882, però, il Lindemann tagliò la testa al toro dimostrando la trascendenza di π.

L'enunciato del teorema di Lindemann è il seguente:

Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ sono numeri algebrici qualsiasi e $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots, \kappa_n$ interi relativi non tutti nulli, allora l'espressione

$\kappa_1 e^{\lambda_1} + \kappa_2 e^{\lambda_2} + \kappa_3 e^{\lambda_3} + \ldots + \kappa_n e^{\lambda_n}$ non può mai essere nulla.

Utilizzerò tale enunciato per mostrare "alla carlona" che il numero π è trascendente; ritorno a Eulero.

Eulero, con la sua mente prolifica, superò di gran lunga la produzione scientifica della maggior parte dei colleghi dell'epoca, sia per quantità che per qualità.

Fu proprio per la prolificità e l'intraprendenza che riuscì a ottenere risultati esplosivi con gli sviluppi in serie, e, in particolare ottenne:

1) $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots + \frac{y^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}$ (y qualunque complessa)

2) $sen x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

tutte serie convergenti qualunque x.

Abbiamo detto che nella (1) la y può essere reale o immaginaria; naturalmente se la y è complessa deve soddisfare in modulo alle stesse limitazioni corrispondenti a quando è reale; se poniamo, perciò, $y = ix(i = \sqrt{-1})$ la (1) diventa:

$e^y = e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \ldots$ e applicando la proprietà commutativa e tenendo presenti gli sviluppi (2) e (3) si ottiene:

$$e^{ix} = \left\{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots. + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ldots\right\} +$$

$$+ i\left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots. + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ldots\right\} = \cos x + isenx$$

e analogamente:

$e^{-ix} = \cos x - isenx$

In questo consistono le celebri formule di Eulero che hanno il pregio di fornire il "mezzo" per passare dall'algebra alla trigonometria come se quest'ultima fosse un capitolo della prima!

Tralascio di approfondire questo legame per mettere in rilievo ciò che mi sono prefisso.

Sostituisco nella formula

$e^{ix} = \cos x + isenx, \; x = \pi \; e \; ottengo:$

$e^{i\pi} = \cos \pi + isen\pi = -1, ossia$

$e^{i\pi} + 1 = 0$

A questo punto balza subito agli occhi la potenza unificatrice della suddetta formula, la quale riunisce in uno spazio limitatissimo:

1) lo zero

2) l'unità reale positiva

3) il numero $e = \lim_{x,\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

4) il valore di π

5) l'unità immaginaria i

e ciò non è cosa da nulla!

Riprendiamo ora l'enunciato del teorema di Lindemann:

$\kappa_1 e^{\lambda_1} + \kappa_2 e^{\lambda_2} + ... + \kappa_n e^{\lambda n} \neq 0;$

se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3......\lambda_n$ sono numeri algebrici qualsiasi e $\kappa_{1,} \kappa_{2,} \kappa_{3,} ....\kappa_n$ interi relativi non tutti nulli, riprendiamo l'equazione ottenuta: $e^{i\pi} + 1 = 0$

e osserviamo che tale uguaglianza è soddisfatta da:

$k_1 = k_2 = 1, \ \ \lambda_1 = i\pi, \ \lambda_2 = 0$

ma per il fatto che $e^{i\pi} + 1$ non sia diverso da zero come richiede il teorema di Lindemann per qualunque valore algebrico attribuito a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3......\lambda_n$, dobbiamo convenire che $\lambda_1 = i\pi$ non è algebrico bensì trascendente.

Poiché $i = \sqrt{-1}$ è algebrico ne discende che la trascendenza di λ_1 implica la trascendenza di π.

Peppe Ditta

(già ordinario di Matematica e Fisica nei Liceo Scientifico "Vincenza Fardella" di Trapani)

PS:

Propongo , anche , agli interessati lettori di questa rivista la visione del film **"IL MISTERO DI PI GRECO"** dove si narrano le vicende di un matematico alla disperata ricerca dell'inafferrabile numero che la greca tradizione ci ha lasciato in eredità.

Ricordo, infine, una filastrocca che, memorizzata, ci aiuta a ricordare le prime venti cifre decimali d π , una goccia nel mare delle sue infinite cifre.

AVE O ROMA O MADRE GAGLIARDA DI LATINE VIRTU' CHE TANTO LUMINOSO SPLENDORE PRODIGA SPARGESTI CON LA TUA SAGGEZZA (3,141592653589793238)

π =3.

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164

0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172

5359408128 4811174502 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196

4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610

4543266482 1339360726 0249141273 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540

9171536436 7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036

5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724

8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798

6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132 0005681271 4526356082

7785771342 7577896091 7363717872 1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235 4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859 5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303 5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 ...