Dall'occhio di Horus alla congettura di Erdos

Aldo Scimone*

> Perché gli egizi insistessero per rappresentare le frazioni in questo modo non è affatto chiaro. Forse così le trovavano più semplici.
>
> Paul Hoffman, *L'uomo che amava solo i numeri*, Mondadori, 1999, p. 143

Introduzione

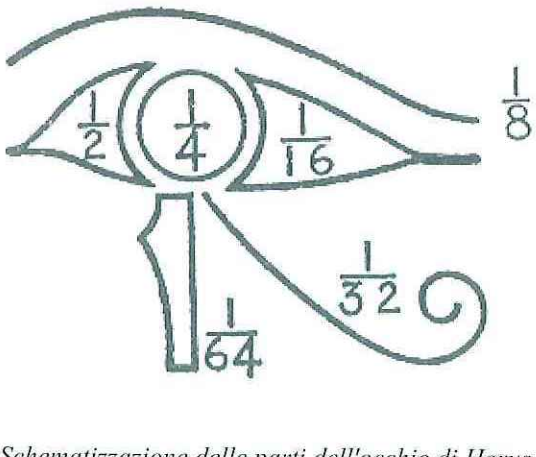
Nella mitologia dell'antico Egitto Horus era il dio del cielo, il falcone i cui occhi erano il Sole e la Luna. Thot era invece il dio che sapeva contare, protettore della Luna e creatore del calendario.

Raffigurazione del dio falcone Horus

Poiché egli contava il tempo dell'anno in 12 mesi lunari di 30 giorni, per ristabilire la durata reale dell'anno, doveva giustificare i 5 giorni

* G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca per l'Insegnamento delle Matematiche) Dipartimento di Matematica dell'Università di Palermo, via Archirafi 34 – 90123 Palermo. E-mail: aldo.scimone@libero.it.

supplementari; e fece ciò offrendoli alla dea del Cielo, Nout, la quale, divenuta sterile durante l'anno, partorì un dio per ognuno di quei cinque giorni rubati alla Luna: Osiride, Horus il Vecchio, Seth, Iside e Nephtys.
Osiride sposò Iside e insegnò agli uomini il rispetto degli Dei, l'agricoltura e l'ordine universale.
Ma Seth, accecato dalla gelosia, uccise Osiride. Il figlio di Osiride, anch'egli di nome Horus, prima che avesse raggiunto l'età per combattere, sfidò lo zio Seth, per vendicare il padre. Ma la lotta fu impari e Seth cavò un occhio di Horus spezzandolo in sei parti che disperse. Fu allora che in soccorso di Horus intervenne Toth il quale riuscì a ritrovare le sei parti, mentre l'ultima venne ricostruita da lui stesso in maniera miracolosa.



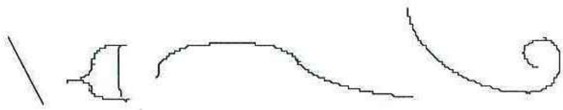
Schematizzazione delle parti dell'occhio di Horus

Così Horus riuscì a sconfiggere il malvagio Seth, ereditando le qualità e i poteri del grande Osiride.
Da quel tempo in poi ogni faraone divenne l'incarnazione di Horus, a sua volta incarnazione del grande dio falcone.
Le parti dell'occhio di Horus rappresentavano, quindi, le metà successive dell'unità: una prima parte della cornea divenne il simbolo per 1/2, la

seconda parte per 1/16, l'iride per 1/4, il sopracciglio per 1/8, il segno obliquo per 1/32 e il segno verticale per 1/64.
Le parti formano, quindi, una progressione geometrica di ragione 1/2, la cui somma è:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+=\frac{32+16+8+4+2+1}{64}=\frac{63}{64}$$

Per restaurare l'occhio interamente manca l'altra sessantaquattresima parte di esso che venne ricostruita miracolosamente da Toth.
Curiosamente, non si sa perché gli Egizi usassero le parti dell'occhio di Horus per denotare misure di capacità unicamente di cereali e minerali, mentre per le unità agricole venivano utilizzati altri simboli. Per esempio, il seguente geroglifico:



rappresentava

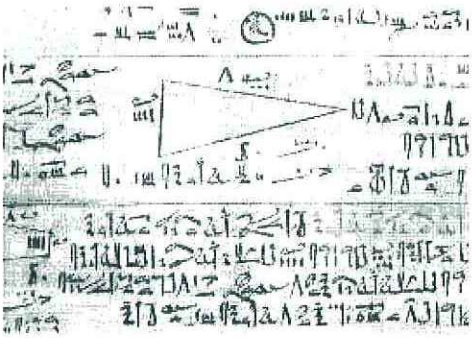
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=1+\frac{21}{32}$$

di moggi d'orzo.
Questa l'origine mitologica delle frazioni egizie, dette anche unitarie perché rappresentano parti dell'unità (o perché hanno come numeratore l'unità).
Non sappiamo perché gli Egizi usassero queste frazioni per rappresentare tutte le altre, ma è plausibile pensare che il loro uso fosse legato al culto del faraone, considerato come un dio al quale si riconduceva tutta la ricchezza dell'Egitto, per cui la divisione di qualsiasi cosa in parti rifletteva la divisione dell'*unica* ricchezza che era quella del sovrano.
L'uso di tali frazioni è testimoniato dal più importante scritto matematico dell'antico Egitto, il famoso *Papiro Rhind* (o di *Ahmes*, dal nome dello scriba che ne fu l'autore) risalente all'incirca al 1650 a.C., copia di un papiro molto più antico, e scritto in caratteri *ieratici*, che contiene

all'inizio due tabelle in cui vengono scomposte in frazioni *unitarie* frazioni del tipo:

$$\frac{2}{n} \text{ e } \frac{n}{10}$$

dopodiché vengono risolti ottantaquattro problemi di vario tipo.



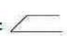
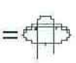
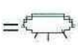
Una parte del Papiro Rhind

Vi si trovano, per esempio, le scomposizioni:

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{28}+\frac{1}{4} \qquad \frac{2}{5}=\frac{1}{15}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{104}+\frac{1}{52}+\frac{1}{8}$$

L'uso delle frazioni unitarie fu il tratto caratteristico dell'aritmetica egiziana. Benché gli Egiziani avessero un segno speciale per le frazioni 1/2, 2/3 e 3/4:

$\frac{1}{2}=$  $\frac{2}{3}=$  $\frac{3}{4}=$ 

le frazioni che non potevano essere espresse mediante una singola frazione unitaria venivano scritte come somma di frazioni unitarie.

Ma tali rappresentazioni non erano uniche. Così, per esempio, la frazione 7/24 poteva essere rappresentata in due modi:

$$\frac{7}{24}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{7}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}$$

Questo particolare modo di scrivere le frazioni rimase nella cultura egizia anche durante l'era cristiana, quando altri popoli europei avevano da tempo adottato altri sistemi di numerazione e di rappresentazione dei numeri.

Fibonacci e le frazioni egizie

Il primo studio completo sui modi di rappresentare una frazione mediante la somma di frazioni unitarie comparve nel Medioevo nel capolavoro *Liber Abaci* (1202) del grande matematico italiano Leonardo Pisano (c. 1180 - c. 1250) meglio noto come Fibonacci.
Il padre, quando Leonardo era ancora un ragazzino, aveva avuto l'incarico di dirigere l'ufficio doganale di Bugea in Algeria, e aveva voluto accanto a sé il figlio, facendogli seguire per qualche tempo un corso sul nuovo calcolo posizionale dei matematici indiani.

Ritratto di Leonardo Pisano detto Fibonacci

Fu così che Leonardo si avvicinò alla matematica; in seguito, sempre per conto dei mercanti pisani, ebbe modo di viaggiare molto e di entrare in contatto con i matematici dell'Egitto, della Siria, della Provenza e della Grecia, non trascurando, nel frattempo, lo studio approfondito degli *Elementi* di Euclide.
Lo studio approfondito dei modi di rappresentare una frazione mediante frazioni egizie è contenuto nella *Parte Sesta* del Settimo Capitolo del *Liber Abaci*.
Fibonacci distingue sette casi, che lui chiama *distinzioni*, di scomposizione di una frazione in frazioni egizie e infine fornisce un metodo generale di rappresentazione.

1ª Distinzione

Viene suddivisa in tre sottocasi anche se non ce ne sarebbe bisogno, ma al tempo di Fibonacci le distinzioni fatte da lui erano necessarie per il modo in cui egli scriveva le frazioni.

a) Semplice quando il denominatore della frazione da scomporre è un multiplo del denominatore, per cui la riduzione è immediata.
Da

$$\frac{m}{km}$$

segue

$$\frac{m}{km} = \frac{1}{k}$$

Esempi:

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} \qquad\qquad \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

b) Composto quando, essendo sempre il denominatore un multiplo del numeratore, la semplificazione può essere agevolata scomponendo il denominatore.

Esempi:

$$\frac{2 \quad 0}{4 \quad 9} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1 \quad 0}{2 \quad 9} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{18}$$

$$\frac{3 \quad 0}{9 \quad 10} = \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1 \quad 0}{3 \quad 10} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{30}$$

c) Composto inverso quando, essendo sempre il denominatore un multiplo del numeratore, la semplificazione può essere agevolata scomponendo il denominatore e invertendo i fattori.

Esempi:

$$\frac{3 \quad 0}{5 \quad 9} = \frac{3 \quad 0}{9 \quad 5} = \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1 \quad 0}{3 \quad 5} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{15}$$

$$\frac{4 \quad 0}{7 \quad 8} = \frac{4 \quad 0}{8 \quad 7} = \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1 \quad 0}{2 \quad 7} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{14}$$

$$\frac{5 \quad 0}{9 \quad 10} = \frac{5 \quad 0}{10 \quad 9} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1 \quad 0}{2 \quad 9} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{18}$$

2^a Distinzione

Si ha quando il denominatore (che Fibonacci in tutti gli otto casi suppone sempre maggiore del numeratore) non è multiplo del numeratore, ma quest'ultimo può essere espresso mediante la somma di numeri che sono divisori del denominatore, per cui ci si riconduce ai tre sottocasi della prima distinzione.

In generale si può scrivere:

$$\frac{m+n}{mnp} = \frac{1}{mp} + \frac{1}{np}$$

Esempi:

$$\frac{5}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{3\quad 0}{4\quad 10}=\frac{3}{4\cdot\ 10}=\frac{2+1}{4\cdot\ 10}=\frac{2}{4\cdot\ 10}+\frac{1}{4\cdot\ 10}=\frac{1\quad 0}{2\quad 10}+\frac{1\quad 0}{4\quad 10}$$

cioè:

$$\frac{3\quad 0}{4\quad 10}=\frac{1}{20}+\frac{1}{40}\qquad \frac{7}{8}=\frac{4+2+1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{5\quad 0}{8\quad 9}=\frac{5}{8\cdot 9}=\frac{1+4}{8\cdot 9}=\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{4}{8\cdot 9}=\frac{1\quad 0}{8\quad 9}+\frac{1\quad 0}{2\quad 9}$$

ovvero:

$$\frac{5\quad 0}{8\quad 9}=\frac{1}{72}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{5\quad 0}{8\quad 10}=\frac{5\quad 0}{10\quad 8}=\frac{5}{10\cdot 8}=\frac{1+4}{10\cdot 8}=\frac{1}{10\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 10}=\frac{1\quad 0}{10\quad 8}+\frac{1\quad 0}{2\quad 10}$$

cioè:

$$\frac{1}{80}+\frac{1}{20}$$

3ª Distinzione

Si ha quando il successivo del denominatore è divisibile per il numeratore. Un sottocaso si ha quando il numeratore può essere scomposto in parti, ciascuna delle quali è un divisore del successivo del denominatore.

La regola da seguire è la seguente: si divide il successivo del denominatore per il numeratore; il quoziente ottenuto sarà minore della frazione data; si sottrae tale quoziente dalla frazione data, ottenendo una

frazione unitaria o una frazione sulla quale si potrà applicare lo stesso metodo.
Sia a/b la frazione data, tale che $b + 1 = a \cdot q$. Si ottiene:

$$\frac{a}{b+1} = \frac{1}{q} < \frac{a}{b}$$

per cui

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{q} = \frac{a \cdot q - b}{b \cdot q} = \frac{1}{b \cdot q}$$

quindi:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \frac{1}{b \cdot q}$$

D'altra parte, essendo

$$q = \frac{b+1}{a}$$

si ottiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b+1} + \frac{a}{b \cdot (b+1)}$$

da cui l'identità:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b \cdot (b+1)}$$

la quale permette di ottenere infinite scomposizioni in frazioni unitarie di una stessa frazione.
Sia data, per esempio, la frazione

$$\frac{2}{11}$$

Applicando l'algoritmo si ha:

$$\frac{2}{11}=\frac{2}{12}+\frac{2}{11\cdot 12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$

Nello stesso modo, data la frazione

$$\frac{5}{19}$$

si ha:

$$\frac{5}{19}=\frac{5}{20}+\frac{5}{19\cdot 20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{76}$$

Come esempio del sottocaso di questa distinzione Fibonacci riporta il seguente. Sia data la frazione

$$\frac{8}{11}$$

Poiché il numeratore si può scrivere come $8 = 2 + 6$, e 2 e 6 dividono il successivo di 11, allora si ottiene:

$$\frac{8}{11}=\frac{2+6}{11}=\frac{2}{11}+\frac{6}{11}$$

Ora si applica la regola della distinzione alle frazioni:

$$\frac{2}{11} \quad \text{e} \quad \frac{6}{11}$$

ottenendo per ciascuna di esse:

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66} \quad \text{e} \quad \frac{6}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{22}$$

Infine:

$$\frac{8}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$$

4ª Distinzione

Si ha quando il denominatore è un numero primo e il suo successivo è divisibile per l'antecedente del numeratore.
In realtà, questa distinzione rientra nella 3ª, ma forse Fibonacci la prende in considerazione per ottenere scomposizioni diverse di una stessa frazione. Sia data la frazione:

$$\frac{a}{p} \quad \text{con } p \text{ numero primo}$$

Se

$$p+1=(a-1)\cdot q$$

si ha:

$$\frac{a-1}{p+1}=\frac{1}{q}<\frac{a}{p}$$

per cui:

$$\frac{a}{p}-\frac{1}{q}=\frac{aq-p}{pq}=\frac{q+1}{pq}=\frac{1}{p}+\frac{1}{pq}$$

e infine:

$$\frac{a}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{p}+\frac{1}{pq}$$

Sia data, per esempio, la frazione:

$$\frac{5}{11}$$

essendo, in questo caso, $q = 3$, poiché $12 = 4 \cdot 3$, applicando l'algoritmo, si ottiene:

$$\frac{5}{11}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}$$

5ª Distinzione

Si ha quando il denominatore è pari e il successivo del numeratore divide il denominatore diminuito di 2. La regola da seguire in questo caso è la seguente: si scrive il numeratore come somma di due termini di cui uno è 2, ottenendo due frazioni, delle quali una rientra nella 1ª distinzione; mentre l'altra potrà scomporsi secondo la regola della 3ª distinzione.
Sia data la frazione:

$$\frac{11}{26}$$

Poiché $11 = 9 + 2$, si ha:

$$\frac{11}{26}=\frac{2+9}{26}=\frac{2}{26}+\frac{9}{26}=\frac{1}{13}+\frac{9}{26}$$

La frazione

$$\frac{9}{26}$$

rientra nella 3ª distinzione perché il successivo di 26, che è 27, è divisibile per 9, per cui si ha di seguito:

$$\frac{9}{26}=\frac{9}{27}+\frac{9}{26\cdot 27}=\frac{1}{3}+\frac{1}{78}$$

e infine:

$$\frac{11}{26}=\frac{1}{78}+\frac{1}{13}+\frac{1}{3}$$

6ª Distinzione

Si ha quando il denominatore è divisibile per 3 e il suo successivo è divisibile per il numeratore diminuito di 3. In questo caso la regola da seguire è: si scompone il numeratore in due parti, di cui una è 3; si

ottengono due frazioni di cui quella con numeratore 3 rientra nella 1^a distinzione, mentre l'altra nella 3^a distinzione, per cui, applicando le regole relative, si otterrà la scomposizione desiderata.
Sia data la frazione:

$$\frac{17}{27}$$

Si ha:

$$\frac{17}{27}=\frac{3+14}{27}=\frac{14}{27}+\frac{3}{27}$$

La frazione 3/27 rientra nella 1^a distinzione, per cui:

$$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$$

La frazione 14/27 rientra nella 3^a distinzione poiché il successivo di 27 è divisibile per 14. Si ottiene:

$$\frac{14}{28}=\frac{1}{2}$$

che è minore di 14/27, per cui:

$$\frac{14}{27}-\frac{1}{2}=\frac{1}{54}$$

Infine si ottiene la scomposizione:

$$\frac{17}{27}=\frac{1}{54}+\frac{1}{9}+\frac{1}{2}$$

7ª Distinzione

Si ha quando la frazione da scomporre non rientra in nessuna delle distinzioni precedenti. In questo caso la regola da seguire è la seguente: si divide il denominatore per il numeratore e si vede tra quali interi è compreso il quoziente. Se – come dice Fibonacci – il quoziente della frazione da scomporre è compreso, per esempio, tra 3 e 4, allora il numeratore della frazione sarà maggiore di 1/3 e supererà di 1/4 il denominatore, per cui si sottrarrà 1/3 dalla frazione data e la frazione che si otterrà o rientrerà in una delle sei distinzioni precedenti oppure si potrà procedere nuovamente con la nuova regola.
In generale, se si deve scomporre a/b (ridotta ai minimi termini), si ha la relazione:

$$b = a \cdot q + r \ \ (\text{con } 0 \leq r < a);$$

dividendo per b e per q si ha:

$$\frac{1}{q} = \frac{a}{b} + \frac{r}{bq}$$

che implica

$$\frac{1}{q+1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q}$$

per cui:

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{q+1} = \frac{a(q+1)-b}{b(q+1)}$$

cioè:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q+1} + \frac{a(q+1)-b}{b(q+1)}$$

Ma

$$a(q+1) - b = aq + a - b = b - r + a - b = a - r$$

e infine:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q+1}+\frac{a-r}{b(q+1)}$$

Esempi

a) Sia data la frazione:

$$\frac{4}{13}$$

Si ha:

$$13 = 4 \cdot 3 + 1$$

per cui $q = 3$ e applicando la formula:

$$\frac{4}{13}=\frac{1}{3+1}+\frac{4-1}{13\,(3+1)}=\frac{1}{4}+\frac{3}{52}$$

Scomponendo la frazione 3/52 secondo la regola della terza distinzione si ha:

$$\frac{3}{52}=\frac{1+2}{52}=\frac{1}{52}+\frac{2}{52}=\frac{1}{52}+\frac{1}{26}$$

e infine:

$$\frac{4}{13}=\frac{1}{52}+\frac{1}{26}+\frac{1}{4}$$

A questo punto Fibonacci afferma che la frazione 3/52 si sarebbe potuta scomporre ancora con quest'ultima regola senza rifarsi alla 2ª distinzione. Infatti:

$$52 = 3 \cdot 17 + 1$$

con $q = 17$, $r = 1$, per cui:

$$\frac{3}{52}=\frac{1}{18}+\frac{3-1}{52\cdot 18}=\frac{1}{18}+\frac{1}{468}$$

ottenendo l'altra scomposizione:

$$\frac{4}{13}=\frac{1}{468}+\frac{1}{18}+\frac{1}{4}$$

b) Sia data la frazione:

$$\frac{9}{61}$$

Poiché $61 = 9 \cdot 6 + 7$, allora $q = 6$ e $r = 7$ e:

$$\frac{9}{61}=\frac{1}{7}+\frac{9-7}{427}=\frac{1}{7}+\frac{2}{427}$$

La frazione 2/427 rientra nella 3ª distinzione, quindi:

$$\frac{2}{428}=\frac{1}{214}$$

$$\frac{2}{427}-\frac{1}{214}=\frac{428-427}{91592}=\frac{1}{91592}$$

Infine:

$$\frac{9}{61}=\frac{1}{91592}+\frac{1}{214}+\frac{1}{7}$$

Osservazione

Dato che la prima frazione unitaria ha un denominatore grande Fibonacci la scrive nella forma:

$$\frac{1 \quad 0}{214 \quad 427}$$

A questo punto egli fa notare che la frazione 2/427 si sarebbe potuta scomporre in modo diverso. Infatti:

$$\frac{2}{427}=\frac{2\cdot 4}{427\cdot 4}=\frac{8}{427\cdot 4}=\frac{1+7}{427\cdot 4}=\frac{1}{1708}+\frac{7}{427\cdot 4}=\frac{1}{1708}+\frac{1}{244}$$

per cui:

$$\frac{9}{61}=\frac{1}{1708}+\frac{1}{244}+\frac{1}{7}$$

c) Sia data la frazione:

$$\frac{17}{29}$$

essendo

$$29 = 17 \cdot 1 + 12$$

si ha $q = 1$ e $r = 12$, per cui:

$$\frac{17}{29}=\frac{1}{2}+\frac{17-12}{58}=\frac{1}{2}+\frac{5}{58}$$

La frazione 5/58 potrà essere scomposta ancora con lo stesso metodo, per cui, essendo $58 = 5 \cdot 11 + 3$, si ha:

$$\frac{5}{58}=\frac{1}{12}+\frac{5-3}{12\cdot 58}=\frac{1}{12}+\frac{2}{12\cdot 58}=\frac{1}{12}+\frac{1}{348}$$

Infine:

$$\frac{17}{29}=\frac{1}{348}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}$$

Regola universale per la scomposizione in frazioni unitarie

La regola che Fibonacci suggerisce è la seguente. Si considerino i numeri che hanno molti divisori, come 12, 24, 36, 48, 60 o un qualsiasi altro numero che sia maggiore della metà del denominatore della frazione che si vuole scomporre e minore del suo doppio. Si scrive la frazione

equivalente di quella data moltiplicando numeratore e denominatore per il numero scelto. Si divide il nuovo numeratore per il denominatore della frazione data in modo da ottenere due frazioni che rientreranno nelle distinzioni precedenti.
Fibonacci considera nuovamente la frazione 17/29. Poiché 24 è maggiore della metà del denominatore e minore del suo doppio, si ha:

$$\frac{17}{29}=\frac{17\cdot 24}{29\cdot 24}=\frac{408}{29\cdot 24}$$

Si divide 408 per 29, ottenendo:

$$\frac{17}{29}=\frac{17\cdot 24}{29\cdot 24}=\frac{408}{29\cdot 24}=\frac{14\cdot 29+2}{29\cdot 24}=\frac{14\cdot 29}{29\cdot 24}+\frac{2}{29\cdot 24}=\frac{7}{12}+\frac{1}{348}$$

La frazione 7/12 rientra nella seconda distinzione, per cui:

$$\frac{7}{12}=\frac{1+6}{12}=\frac{1}{12}+\frac{6}{12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}$$

Infine:

$$\frac{17}{29}=\frac{1}{348}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}$$

risultato già ottenuto con la settima distinzione.
A questo punto Fibonacci fa notare che, se invece di scegliere 24 si fosse scelto 36, allora si sarebbe ottenuto:

$$\frac{17}{29}=\frac{17\cdot 36}{29\cdot 36}=\frac{612}{29\cdot 36}=\frac{21\cdot 29+3}{29\cdot 36}=\frac{21\cdot 29}{29\cdot 36}+\frac{3}{29\cdot 36}=\frac{7}{12}+\frac{1}{348}$$

La frazione 7/12 rientra nella 3^a distinzione e si può scomporre in due modi:

$$\frac{7}{12}=\frac{1+6}{12}=\frac{1}{12}+\frac{6}{12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{12}=\frac{3+4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$

Quindi, per la frazione 17/29 si hanno le due scomposizioni:

$$\frac{17}{29}=\frac{1}{348}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}$$

ottenuta precedentemente, e l'altra:

$$\frac{17}{29}=\frac{1}{348}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$

Sylvester e Fibonacci

Le frazioni continue hanno continuato a ispirare i matematici lungo il corso dei secoli. Il matematico inglese James Joseph Sylvester (1814-1897) scoprì[1] nel 1880 un algoritmo di rappresentazione delle frazioni dell'intervallo (0, 1) mediante frazioni unitarie, senza sapere che il suo metodo non era altro che la settima distinzione di Fibonacci. Ma ciò avviene spesso in Matematica, e oggi il metodo è noto come *algoritmo di Sylvester-Fibonacci*. Illustriamolo con un esempio. Sia data la frazione 23/34 da rappresentare come somma di frazioni unitarie. L'algoritmo di Sylvester si esplica attraverso i seguenti passaggi:

a) Si determina il primo multiplo $k \cdot 23$ che supera il denominatore della frazione. Si ha:

$$34 < 2 \cdot 23$$

---

[1] James Joseph Sylvester, *On a point in the Theory of Vulgar fractions*, American Journal of Mathematics, III. (1880), pp. 332-335, 388-389; ristampato in *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, volume III, Chelsea Publishing Company, New York N. Y., pp. 440-445.

b) Dal punto *a*) si ricava quindi che

$$\frac{1}{k} < \frac{m}{n}$$

nel nostro caso:

$$\frac{1}{2} < \frac{23}{34}$$

c) Si esegue la differenza

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{k}$$

nel nostro caso:

$$\frac{23}{34} - \frac{1}{2} = \frac{23 - 17}{34} = \frac{6}{34} = \frac{3}{17}$$

d) Se risulta

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{k} = \frac{1}{h}$$

allora l'algoritmo è terminato e si avrà la rappresentazione:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{h}$$

e) Se la differenza, come nel nostro esempio, è una frazione m'/n', allora si torna al punto *a*) e si prosegue finché al punto *c*) si ottiene una frazione unitaria.
Nel nostro caso si ha:

$$17 < 6 \cdot 3 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{3}{17} \Rightarrow \frac{3}{17} - \frac{1}{6} = \frac{18 - 17}{102} = \frac{1}{102}$$

per cui:

$$\frac{23}{34}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{102}$$

La congettura di Erdös

Si può pensare che le frazioni egizie siano ormai un argomento sorpassato e che si debbano considerare alla pari di altre curiosità matematiche. Invece esse sono riapparse inaspettatamente in diversi ambiti matematici, e hanno ispirato molte ricerche nell'ambito dell'informatica. Si conoscono oggi molti algoritmi elaborati proprio per rappresentare le frazioni mediante frazioni unitarie per risolvere problemi di partizione di frazioni mediante un numero minimo di frazioni unitarie, oppure mediante frazioni unitarie con valori molto piccoli dei denominatori. Non mancano ricerche di carattere più teorico, come un risultato brillante ottenuto nel 1955 dal matematico americano Ron Graham il quale dimostrò che, all'interno di una certa gamma, esistono infinite frazioni rappresentabili mediante frazioni unitarie aventi per denominatori quadrati perfetti, come per esempio:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{54^2}+\frac{1}{112^2}+\frac{1}{640^2}+\frac{1}{4.302^2}+$$
$$+\frac{1}{10.080^2}+\frac{1}{24.192^2}+\frac{1}{40.320^2}+\frac{1}{120.960^2}$$

Le frazioni unitarie possono essere usate anche nell'educazione matematica quando si presenta la necessità di fare comprendere agli allievi di quante parti una frazione può superare un'altra.
Supponiamo di volere determinare quale sia la frazione maggiore tra 3/4 e 4/5. Potremmo usare la rappresentazione decimale per stabilire che 3/4 = 0, 75 risulta minore di 4/5 = 0, 8. Se si desidera giungere al risultato senza eseguire la divisione si potrebbero trasformare le due frazioni in altre due frazioni equivalenti aventi lo stesso denominatore: 3/4 = 15/20 e 4/5 = 16/20 e trarre la stessa conclusione di prima, dato che 15 < 16.

Ma in entrambi i casi non si mette in evidenza per quale frazione dell'unità 3/4 risulti minore di 4/5.
Ciò può essere mostrato rappresentando le due frazioni mediante frazioni unitarie. Infatti, si ha:

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

Possiamo così notare che la frazione 4/5 è maggiore di 3/4 esattamente di 1/20. Questo argomento potrebbe apparire più convincente a quegli alunni che ritengono artificiosi i due precedenti meccanismi di confronto.
Le frazioni unitarie sono anche oggetto di due celebri congetture di teoria dei numeri, tuttora irrisolte.
La prima congettura è dovuta a Paul Erdös[2] (1913-1996) e E. G. Straus, secondo la quale l'equazione diofantina

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

per $n \geq 3$ ammette sempre soluzioni intere, cioè è sempre possibile scomporre una frazione di quel tipo mediante la somma di tre frazioni unitarie. Detto altrimenti, esistono sempre tre interi x, y e z tali da soddisfare l'equazione

$$4xyz = nyz + nxz + nxy$$

Quest'ultima forma in cui viene scritta l'equazione mostra la complessità della congettura e spazza via l'apparente semplicità della prima forma.
Sorge la domanda: quale importanza avrebbe dimostrare tale congettura? Ebbene, se essa fosse vera, sarebbe qualcosa di veramente sorprendente, perché fino a oggi, sulla scomposizione di una frazione propria del tipo

---

[2] P. Erdös, As $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\frac{1}{x_n}=\frac{a}{b}$ egyenlet egész számú megoldásairól, Mat. Lapok., 1950, pp. 192-210.

a/b, con $a < b$, noi possiamo solo avere la certezza, dataci dalla dimostrazione di un teorema, che essa è sviluppabile mediante la somma:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_s}$$

con $s \leq a$, e quindi, per le frazioni del tipo $4/n$ possiamo solo dire che esse possono essere scritte come somma di quattro frazioni unitarie.

Paul Erdös

La congettura di Erdös e Straus abbassa proprio questo limite e afferma che bastano solo tre frazioni egizie per scomporre le frazioni del tipo $4/n$. La congettura di Erdös e Straus ha ispirato al matematico polacco W. Sierpinski (1882-1969) un'altra famosa congettura, la quale afferma che bastano solo tre frazioni egizie per scomporre ogni frazione del tipo $5/n$.

Conclusione

Giunti alla fine di questo breve excursus sulle frazioni egizie non possiamo non rimanere lietamente sorpresi nel constatare come un argomento che sembrava ormai relegato all'archeologia matematica abbia attraversato i millenni dello sviluppo del pensiero matematico giungendo fino alla nostra epoca in forme sempre stimolanti per la ricerca matematica e per la crescita del nostro sapere.

Bibliografia

1. Guy, R. K., *"Egyptian Fractions"* in Unsolved Problems in Number Theory, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1994, pp. 158-166.

2. Leonardo Pisano, *Liber Abbaci*, vol. I degli Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo, pubblicati da Baldassarre Boncompagni, Roma, 1857.

3. Rosati, L. A., *"Sull'equazione diofantea"*, Boll. U. M. I., 9, 1954, pp. 59-63.

4. Sylvester J. J., *On a point in the Theory of Vulgar fractions*, American Journal of Mathematics, III. (1880), pp. 332-335, 388-389; ristampato in *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, volume III, Chelsea Publishing Company, New York N. Y., pp. 440-445.

5. Vaughan, R. C. *"On a Problem of Erdos, Straus and Schinzel"* Mathematika 17, 1970, pp. 193-198.