Sezione Scientifica

Alcune osservazioni sperimentali fra senso comune e logica fuzzy

M. Ajello [1] – **F. Spagnolo** [2]

1.0 Quale relazione tra la logica fuzzy e senso comune?

Una grande attenzione ha avuto B. Kosko, nei suoi lavori sul fuzzy-pensiero, verso alcuni aspetti del nostro comportamento nella vita quotidiana legata alla capacità di prendere decisioni o mantenere il controllo di una situazione. Ha evidenziato che, nella maggior parte dei casi, siamo in grado, davanti ad un problema di scelta, di individuare una buona possibilità facendo valutazioni globali sulle diverse opzioni che ci si presentano. Per quanto analitico possa essere il nostro pensiero, se decidere è una necessità e va fatto nel più breve tempo possibile, riusciamo a scegliere un comportamento adeguato in tempo utile, facendo con i nostri *pro* e *contro* medie fuzzy ponderate (Kosko, 1999).

Sempre in relazione ai nostri comportamenti, si può parlare di "regole" tutte le volte che associamo idee e mettiamo in relazione una cosa, un evento o un processo con un'altra cosa, un altro evento o un altro processo. Anche nel linguaggio naturale, come nel caso di un linguaggio di programmazione, regole del tipo se-allora ci aiutano a gestire un ragionamento.

È condivisibile la posizione di Kosko il quale sostiene che le regole dei nostri ragionamenti sono regole fuzzy.

Infatti una regola fuzzy mette in relazione insiemi fuzzy e ha la forma SE X è A ALLORA Y è B, così come l'espressione "*se la giornata è molto calda mi vesto con abiti molto leggeri*" con

---

1 - **M. Ajello: G.R.I.M.**, Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche, Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Via Archirafi n. 34 90123 Palermo. Tel. 0039 091 6040434. E-mail: mariajello@katamail.com.

2 - **F. Spagnolo**: G.R.I.M., Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche, Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Via Archirafi n. 34 90123 Palermo. Tel. 0039 091 6040434. E-mail: spagnolo@math.unipa.it. Web-site: http://dipmat.math.unipa.it/~grim/.

X = {i giorni dell'anno}, A = {giorni dell'anno molto caldi},

Y = {abiti}, B = {abiti molto leggeri}

risulta del tipo

SE X è A ALLORA Y è B

($A \subset X$, A insieme fuzzy , $B \subset Y$,B insieme fuzzy).

Così malgrado il nostro diverso *sentire* il caldo e *percepire* la leggerezza, il senso comune da un significato comune alla regola fuzzy "se la giornata è molto calda mi vesto con abiti molto leggeri".

2.0 Logica fuzzy e complessità

La matematica, "il linguaggio in cui è scritto il Libro della Natura", doveva avere come caratteri "triangoli cerchi e altre figure geometriche". Così almeno è stato per Galileo Galilei e molti altri dopo di lui.

Oggi, se si vuole affiancare alla logica bivalente la logica fuzzy, va considerata la possibilità di affiancare alle formule matematiche "relazioni qualitative" che coinvolgono variabili linguistiche, nel senso che i loro valori non sono numeri ma parole. In questo senso Lofti Zadeh[3] ha detto che la logica fuzzy dà un metodo per calcolare con le parole.

L'espressione di Zadeh mette però l'accento su questioni molto più ampie che coinvolgono i modi dell'argomentare, del porre congetture, dell'apprendere e quindi dell'insegnare.

Si aprono le porte a nuove inferenze dove premesse e conclusioni assumono significati diversi da quelli usuali e dove appaiono termini come fuzzificare e defuzzificare, rispettivamente passare da una regola fuzzy ad una forma matematica e viceversa.

3 - Lotfi A. Zadeh é nato il 4 febbraio 1921 a Baku in Russia. Ha frequentato le scuole superiori a Teheran (Iran), e ha conseguito la laurea in ingegneria eletrica nel 1942 a Teheran. Si è poi trasferito negli Stati Uniti nel 1944. Dal 1965 I lavori di Zadeh sono stati orientate verso la teoria dei sistemi. Da questo momento i suoi interessi sono stati la teoria degli insiemi fuzzy e le sue applicazioni nel campo dell'intelligenza artificiale, linguistica, logica, decision analysis, teoria dei controlli, sistemi esperti e neural networks. Le sue ricerche sono adesso orientate verso la logica fuzzy, soft computing, computing with words. Il suo libro "Fuzzy Sets" é del 1965. Una bibliografia aggiornata si può trovare nel sito web http://www.cs.berkeley.edu/People/Faculty/Homepages/zadeh.html

Si prospettano scenari "vaghi" e non sono ancora stati fissati i limiti di una scienza fuzzy. Quale atteggiamento dovrà avere l'insegnante? Cosa può fare il ricercatore?

Possono anche restare fermi e guardare ma la sfida è grande e cammina accanto ad un'altra travolgente onda: la complessità. Il denominatore comune ce lo offre, anche questa volta, la Natura. Indagare i fenomeni emergenti dei sistemi complessi, dai formicai al cervello, richiede strumenti più flessibili della matematica delle formule. E superare questo limite, a sua volta , vuol dire anche andare oltre una logica bivalente.

Come dice lo stesso Zadeh:

"al crescere della complessità di un sistema, la nostra abilità nel fare dichiarazioni precise ma significative sul suo comportamento diminuisce sino a una soglia oltre la quale la precisione e la significatività diventano caratteristiche che tendono a escludersi mutuamente".

3.0 Quale ipotesi sperimentale è stata seguita?

L'interesse del mercato economico per la logica fuzzy non si è fatto attendere e in Giappone esistono già, dai primi anni novanta prodotti fuzzy. Le tante applicazioni su elettrodomestici, macchine fotografiche ma anche sulla metropolitana della città di Sendai, hanno convinto ormai quasi tutti, non solo gli ingegneri giapponesi, che i sistemi fuzzy "funzionano".

La ricerca ingegneristica sui sistemi fuzzy si riduce, in fondo, alla ricerca di buone regole fuzzy. Il teorema FAT dimostra che è possibile sostituire qualsiasi sistema con un sistema fuzzy; in termini matematici questo significa che un sistema che utilizza un insieme finito di regole fuzzy può approssimare in maniera uniforme ogni sistema continuo.

L'obiettivo più recente è stato quello di progettare e realizzare sistemi fuzzy adattativi, cioè capaci di imparare le proprie regole dai dati. Non sarà l'esperto a dire al sistema quali siano le regole ma, una corrente neurale di dati alimenterà un sistema neurale o statistico e ne farà uscire le regole fuzzy. Un sistema fuzzy adattativo agisce come un esperto umano: apprende dall'esperienza ed è in grado di utilizzare i dati nuovi per perfezionare il proprio patrimonio di conoscenze a abilità.

Gli studiosi di sistemi fuzzy adattativi si sono ispirati alle reti neurali del nostro cervello per costruire neuro-computer in grado di apprendere regole fuzzy da esempi adattando la propria struttura dinamica.

Tutto ciò che riguarda l'apprendimento in genere, per un insegnante, può essere utile per affrontare problemi che si riferiscono all'apprendimento scolastico. Così, **ci si chiede se le inferenze spontanee dell'individuo che argomenta nel suo primo approccio con un "fare" per apprendere sono regole fuzzy.**

I problemi di controllo si prestano a dare esempi semplici di applicazioni di sistemi fuzzy. Le loro caratteristiche sono facilmente riconoscibili: dai valori di alcune variabili di input bisogna calcolare il valore della variabile di output che garantisce un funzionamento soddisfacente del sistema. E in termini fuzzy: SE *condizioni attuali*, ALLORA *azione da intraprendere*.

L'attività proposta ai 28 allievi di un secondo anno di liceo scientifico è stata presentata come un'attività di informatica e si riferisce ad un classico problema di controllo, più noto col nome di problema del pendolo invertito. Ovviamente gli alunni della fascia di età 14/16 anni non hanno ancora gli strumenti per poter costruire un modello matematico per la risoluzione. Quello su cui si è indagato è stato il loro primo approccio con il linguaggio naturale senza che nessuno li abbia guidati, se non attraverso le istruzioni della consegna.

Gli alunni hanno già affrontato, nel precedente anno scolastico, un'unità sugli algoritmi e un modulo sui primi elementi di programmazione nel linguaggio Pascal. Questa attività si inserisce nella programmazione come una proposta per riaprire il discorso interrotto su l'informazione e l'informazione automatica.

3.1 Il contesto sperimentale

Il lavoro è stato inserito nell'ambito delle ore (3) di una attività informatica.

I fase.

Gli alunni divisi in coppie hanno a disposizione un bastoncino, carta e penna.

1. ***A*** cerca di tenere in equilibrio sul palmo della mano il bastoncino e ***B*** osserva e registra su un foglio le azioni di ***A*** mettendole, di volta in volta, in relazione con la posizione del bastoncino.

2. La coppia si scambia i ruoli e si ripete l'operazione.

3. ***A*** e ***B*** confrontano quanto hanno scritto e compilano una tabella di "istruzioni per tenere in equilibrio un bastoncino sul palmo della mano".

(tempo 1 ora)

II fase.

Gli alunni adesso sono divisi in gruppi di quattro, due coppie delle precedenti, e hanno a disposizioni le istruzioni già compilate, carta e penna.

1. Il gruppo discute della possibilità di far compiere, programmandolo opportunamente, l'esercizio di equilibrio ad un robot e annota eventuali disegni, simboli, variabili, vincoli, e quanto altro ritiene opportuno e formula correttamente il problema.

2. Dopo aver discusso, annotato e date per buone, le ipotetiche condizioni per cui un robot è in grado di eseguire le istruzioni, ognuno prova a formulare e registrare tutte le istruzioni che ritiene valide e opportune per programmare il robot (cercare un algoritmo?) utilizzando solo il linguaggio naturale.
3. Il gruppo, esaminato tutto il materiale che ha prodotto, formula un unico programma per il robot.

(tempo 2 ore)

Nota. Va consegnato tutto il lavoro, bozze esempi e prove anche se non sono state ritenute utili.

3.2 Quali i comportamenti a priori degli alunni?

L'attività presa in esame è, chiaramente, una prova a risposte aperte. Per avviare l'analisi implicativa delle variabili, vanno presi in considerazione i comportamenti ipotizzabili e individuate le variabili, opportune e significative, per l'ipotesi posta. Rispetto ad alcuni possibili comportamenti si è ritenuto opportuno considerare l'espressione "l'alunno fa..." e rispetto ad altri è sembrata più indicativa una notizia su "l'alunno che non fa una determinata cosa".

È anche sembrato necessario individuare nelle due fasi le voci di riferimento, in termini più precisi, delle risposte previste.

I fase

Punto 3: ***compilazione della tabella con le istruzioni (persona-persona) per tenere in equilibrio il bastoncino***

variabile	**descrittore**
ra1	l'alunno utilizza come rappresentazione una tabella
ra2	distingue solo posizione di equilibrio / posizione di non equilibrio.
ra3	non da più di 4 istruzioni
ra4	non considera variabili numeriche

II fase

Punti 1e 2: ***formulazione delle potenzialità del robot e condizioni iniziali***

variabile	descrittore
rb1	l'alunno disegna un robot con sembianze umane
rb2	considera il robot capace di riconoscere lo stato di equilibrio
rb3	considera il robot capace di movimenti
rb4	considera tra le capacità del robot quella visiva
rb5	considera il robot capace di percezione tattile
rb6	specifica le modalità con cui il robot riceve le istruzioni
rb7	considera la lunghezza del bastoncino come
	una possibile variabile che influisce sull'equilibrio
rb8	non specifica se il robot è in grado di eseguire calcoli numerici

II fase

Punto 3: ***formulazione del programma per il robot***

variabile	Descrittore
rc1	l'alunno non utilizza un possibile modello matematico, pur esprimendosi con il linguaggio naturale
rc2	non da valori numerici alle variabili degli stati che considera
rc3	utilizza implicazioni se-allora
rc4	non utilizza istruzioni in sequenza
rc5	non prevede istruzioni con calcoli numerici
rc6	utilizza insiemi fuzzy nelle istruzioni
rc7	tiene in considerazione l'angolo di inclinazione rispetto alla posizione di equilibrio
rc8	tiene in considerazione la velocità del movimento per mantenere l'equilibrio
rc9	non considera misure per l'angolo di inclinazione e/o la velocità del movimento

La scelta delle variabili.

La questione di fondo su cui si indaga è se le inferenze dei ragazzi, nella situazione proposta, sono regole fuzzy. Quindi **i risultati attesi riguardano, essenzialmente, le eventuali implicazioni tra le**

variabili rc1,rc2,rc3,rc4, rc5 e la rc6. Un peso consistente avranno anche le occorrenze di tali variabili ma anche di quelle del primo gruppo ra1, ra2,ra3,ra4. Le eventuali implicazioni forti tra le variabili dei tre gruppi dovranno essere interpretate e potrebbero dare o no indicazioni utili circa le modalità dell'argomentare.

3.3 L'analisi dei dati

Dal grafo implicativo (nell'Appendice 2 sono presenti tutti i grafi dell'analisi statistica) con tutti gli item risulta che le implicazioni più forti (98) sono **rc4 ÆErb5** e **rb6 ÆErb5**, quindi coloro i quali non utilizzano istruzioni in sequenza e quelli che specificano le modalità con cui il robot riceve le istruzioni considerano il robot capace di percezione tattile. D'altra parte nell'albero gerarchico delle implicazioni è evidente il livello alto di implicazione tra rc4 e rb5 ma l'implicazione forte (in rosso) va da rb6 verso rc4 ÆErb5 e continuando, nell'albero, ancora in rosso tutto questo blocco implica rc5 (coloro i quali non prevedono istruzioni con calcoli numerici)e, ancora forte, l'implicazione va verso rc1 (coloro i quali non utilizzano modelli matematici). **Si potrebbe dire che liberandosi dalla struttura in sequenza delle istruzioni ci si libera anche di possibili modelli matematici legati a valori strettamente numerici, e che si è disposti a tener conto (come nel caso della percezione tattile del robot) di altri aspetti qualitativi del problema.**

Un'altra implicazione forte (95) ed estremamente significativa è rc3 ÆErc6, cioè **coloro i quali utilizzano istruzioni se-allora le utilizzano con insiemi fuzzy, formulando così vere e proprie regole fuzzy.** Inoltre il dato dell'occorrenza di **rc3, al 70%** e **rc6 al 85%**, significa che ci si riferisce ad una netta maggioranza degli individui oggetto dell'analisi. Dall'albero della similarità l'osservazione sul "blocco" di cui fanno parte rc3 e rc6 (sono legati da similarità con rc9, ra4, rc5, 5b8, rc1, ra3) permette di **"assimilare" chi fa uso di regole fuzzy con chi non si sente vincolato da misure standard di tipo numerico, da calcoli numerici, da modelli matematici preconfezionati e utilizza complessivamente poche istruzioni.**

Le implicazioni **rb5 ÆErb8**, **rc2 ÆErb8**, **rc5ÆErb8** indicano che coloro i quali non prevedono variabili numeriche e calcoli numerici, non hanno specificato se il robot era o no in grado di fare calcoli numerici ma non lo hanno fatto nemmeno quelli che davano al robot la capacità di percezione tattile. **La capacità attribuita al robot di per-**

cepire con i sensi lo stato di equilibrio, si sostituisce alla capacità di calcolare con i numeri.

3.4 Analisi qualitativa: i protocolli dei ragazzi

1. Alcune istruzioni date nella prima o nella seconda fase dell'attività:

- Se il bastoncino oscilla solo di qualche centimetro,è sufficiente spostare solo la mano in direzione del bastoncino. Se il bastoncino oscilla di molto bisogna spostare il braccio e se necessario il corpo stesso (nella prima fase)
- Se il bastoncino tende ad andare avanti o indietro con poca inclinazione, muovi la mano poco per compensare (nella prima fase).
- Se vuoi avere più mobilità per il braccio, posiziona il bastoncino ad una altezza media (nella prima fase).
- Se la cima del bastoncino va in avanti, deve aumentare l'ampiezza dell'angolo tra il braccio e l'avambraccio e deve aumentare l'inclinazione in avanti del polso (nella seconda fase).
- Per mantenere l'equilibrio fai movimenti impercettibili, medi o rapidi ma sempre coordinati (nella seconda fase).

2. Alcune osservazioni dei ragazzi sulle potenzialità del robot

- il robot ricorre alle istruzioni date quando il suo sensore tattile, posto sulla piattaforma dove poggia la bacchetta si accorge che questa non è in equilibrio;
- il robot ha capacità di riconoscere l'equilibrio attraverso la sua capacità visiva e la sua sensibilità;
- grazie a dei sensori ottici il robot si accorge quando il bastoncino si trova in posizione perpendicolare alla mano.

4.0 Una prima conclusione

I precedenti risultati, hanno un ulteriore significato se si mettono in relazione con il lavoro di Edward De Bono sul rapporto tra creatività e pensiero laterale.

La tabella che segue mette in evidenza, sinteticamente, le analogie e le differenze tra i due modi di pensare che comunemente vengono identificati con i termini *linear* e *parallel.*

PENSIERO VERTICALE LINEAR THINKING	PENSIERO LATERALE PARALLEL THINKING
- È un processo intenzionale - È un atteggiamento mentale - Può essere appreso, praticato, utilizzato	
- È selettivo	- È produttivo
- Sceglie un percorso escludendone altri	- Non seleziona ma cerca di aprire altre vie
- Seleziona il miglior punto di vista	- Genera approcci alternativi nel campo delle possibilità
- Si mette in moto se esiste una direzione in cui muoversi	- Si mette in moto allo scopo di generare una direzione
- È analitico	- È stimolatore
- È consequenziale	- Può procedere a salti
- Nel procedere passo dopo passo ogni passo deve essere giustificato	- Può muoversi liberamente senza tenere conto delle contraddizioni, purché la conclusione sia esatta
- Usa la negazione allo scopo di bloccare alcuni percorsi	- Non usa la negazione, è quindi possibile ripercorrere un'area erronea
- Segue i percorsi più probabili	- Esplora i percorsi meno probabili
- Ci si aspetta di arrivare ad una risposta	- Può esserci una risposta, possono essercene tante, possono essercene alcune parziali

I ragazzi che hanno svolto l'attività per la sperimentazione hanno evidentemente utilizzato entrambi i modi di pensare, privilegiando però il secondo. I protocolli, nei quali compaiono anche i percorsi abbandonati, le battute ironiche sul possibile aspetto del robot, i tentativi di dare *comunque* risposte anche con istruzioni *assurde*, presentano diverse caratteristiche facilmente riconducibili sia al pensiero verticale sia al pensiero laterale.

Va però osservato che il tipo di attività proposta presupponeva **la libertà assoluta dell'alunno dagli schemi convenzionali delle situazioni didattiche.**

Di solito, infatti, le prestazioni che un ragazzo produce , nel suo ruolo di alunno, tendono a seguire più un andamento assimilabile ad un pensiero verticale che non a quello laterale, anche per un equivoco di fondo su una presunta *capacità logica* che, troppo spesso, gli viene riconosciuta *solo* se i requisiti del suo ragionamento sono quelli del pensiero verticale.

Si può, allora, ipotizzare che, oltre alla nota relazione :

pensiero verticale ↔ logica comune (quella bivalente)

ce ne sia un'altra del tipo:

pensiero laterale ↔ logica fuzzy e regole fuzzy

5.0 conclusioni

I ragazzi, durante l'attività proposta, hanno lasciato da parte le loro conoscenze matematiche e informatiche e liberamente si sono espressi nel linguaggio naturale utilizzando vere e proprie regole fuzzy per descrivere le istruzioni di controllo su certe azioni previste. La mancanza di schemi sequenziali ha favorito un pensiero sfumato facendo posto alla creatività e all'inventiva. Questo in sintesi è il risultato dell'esperienza. Ma è opportuno fare alcune considerazioni perché il contesto nel quale si inserisce l'esperienza ha una sua specificità che va resa nota:

- Le modalità di svolgimento dell'attività sono riconducibili più alle cosiddette situazioni a-didattiche di Brousseau (Borusseau, 1997, Spagnolo, 1998) che non ad un qualunque momento dell'insegnamento convenzionalmente inteso (esercitazioni, compiti in classe, verifiche, ecc..). L'alunno ha occasione di dialogare con uno o più compagni, di esprimere il suo parere e di affrontare come meglio crede la situazione proposta. Sa che non ci sono valutazioni di merito sul suo modo di procedere, quello che conta è raggiungere un risultato adeguato alle richieste.

- Non ci sono obiettivi che si riferiscono esplicitamente alle "capacità logiche" e tutti i ragazzi conoscono le linee delle scelte programmatiche. Si è dato sempre, agli alunni, la sensazione di poter seguire comunque il loro pensiero lineare o laterale che sia.
- Nelle scelte di fondo del lavoro con questa classe è stato privilegiato il termine "le matematiche" piuttosto che "la matematica" , si è rinunciato a "conoscere la realtà" in favore della "conoscenza delle realtà" .
- E, infine, incertezza, indeterminazione e incompletezza sono parole con cui gli alunni cominciano a familiarizzare fin dal primo anno affrontando, per esempio, giochi, problemi impossibili, problemi con più soluzioni, situazioni con approccio probabilistico, prove a risposte aperte e svolgendo attività laboratoriali integrate nel loro lavoro scolastico.

Problemi aperti

- Indagine sulle implicazioni che il modo di argomentare con regole fuzzy può avere sulla **formulazione di congetture (si può parlare di congetture fuzzy?)**
- Indagine sulle cognizioni degli alunni su "**precisione e significatività**" nell'argomentare
- Indagine sull'uso che gli studenti fanno di "**relazioni quantitative**" e "**relazioni qualitative**" nella formulazione di congetture
- Indagine sulle possibili implicazioni che può avere nei modi dell'apprendimento un'abitudine a "**interrogazioni fuzzy**", in linguaggio naturale, di un database relazionale.

References

1. Mahdi Abdeljaouad (2003), *Quelques éléments d'histoire de l'analyse combinatoire*, Quaderni di Ricerca in Didattica, n. 11, Palermo, http://dipmat.math.unipa.it/~grim/articles.htm .
2. Ajello M. et alii (2000), Il dialogo tra le discipline: costruire competenze trasversali, Quaderni del CIDI, Palermo
3. Ajello M.–Spagnolo F., 2002, Senso comune e Logica Fuzzy, Quaderni di Ricerca in Didattica, n.11, Palermo, http://math.unipa.it/~grim/quaderno11.htm.
4. Ajello M.– Spagnolo F. (2002), *Some experimental observations on common sense and fuzzy logic*, Palermo, International Conference on Mathematics Education into the 21st Century, http://dipmat.math.unipa.it/~grim/21project.htm

5. Boscolo P. (1997), Psicologia dell'apprendimento scolastico. Aspetti cognitivi e motivazionali, UTET, Torino
6. Brousseau G. (1997), *Theory of Didactical situations in mathematics. 1970-1990*, (304 pages) traduction M. Cooper, N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield. (KLUWER Academic Publishers).
7. Bruner J.S.(2000), Il processo educativo dopo Dewey, Armando editore, Roma
8. Chela K. (2001), I "Nove capitoli sui procedimenti matematici": la costituzione di un canone nella matematica, Storia della Scienza, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.a.
9. Cao Zhong-jun & Bishop Alan (2002), Chinesestudents' approaches to learning of mathematics, ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October.(Faculty of Education, University of Hong Kong, Pokfulam Road).
10. D'Ambrosio U. (2002), Etnomatematica, Pitagora Editrice, Bologna.
11. De Bono E. (1999), Creatività e pensiero laterale, Biblioteca Universale Rizzoli, Milano.
12. D'Amore B. (1999), *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice, Bologna.
13. D'Amore B. (2000), Problems of Representing Concepts in the Learning of Mathematics, Amman (Jordan), International Conference on Mathematics Education into the 21st Century. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/jourdain.htm
14. Dehane S. (2000), *Il pallino della matematica*, Oscar Mondatori, Milano. (The number sense: How the Mind Creates Mathematics, N.York, Oxoford University Press, 1997)
15. Devlin K. (2000), Il Gene della Matematica, Longanesi, 2002. (The math Gene)
16. Duval R., (1993), Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et Sciences Cognitives, ULP, IREM Strasburg, 5, 37-65.
17. Eco U. (1975), Trattato di Semiotica, Bompiani Editore, Milano.
18. Favilli, F. (1998) - *Teaching Geometry in Somalia: Linguistic and Cultural Aspects*, Proceedings of the I International Congress on EthnoMathematics, CD-ROM, Granada.
19. Fischer Walter L.(2002), Historical topics as indicators for the existence of fundamentals in educational mathematics (An intercultural comparison), ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October. (Faculty of Education, University of Hong Kong, Pokfulam Road).
20. Gagatsis A. (2003), A multicultural approach to understanding and learning mathematics, Proceedings 3rd Mediterranean Conference On Mathematical Education, Athens 3-5 January .
21. Granet M. (1968), *La pensée chinoise*, Editions Albin Michel, Paris.
22. Gras R. (2000), Les fondements de l'analyse implicative statistique, Quaderni di Ricerca in Didattica, Palermo, http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm
23. Hino K.-Kaiser G.-Knipping C.(2002), Comparing teaching mathematics in eastern and western traditions – Looking at france, germany, England and japan, ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October.(Faculty of Education, University of Hong Kong, Pokfulam Road).

24. Hirabayashi Ichiei (2002), A traditional aspect of mathematics education in japan: mathemathics as Gei (Art), Its Jutsu (Technique) and Do (Way). ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October.(Faculty of Education, University of Hong Kong, Pokfulam Road).
25. Kosko B. (1999), Il fuzzy pensiero. Teoria e applicazione della logica fuzzy – Baldini & Castaldi, Milano.(***1993***, Fuzzy Thinking: the New Science of Fuzzy Logic, Copyright Bart Kosko, N.York).
26. Kosko B. (1999), Heaven Chip (Fuzzy visins of society and science in the digital age), Three Rivers Press, New York.
27. Leu Yuh-chyn-Wu Chao-Jung (2002), The origins of pupils' awareness of theachers' mathematics pedagogical values: confcianism an Buddhism – driven. ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October.(Faculty of Education, University of Hong Kong, Pokfulam Road).
28. Joseph Needham (1981), *Scienza e Civiltà in Cina* (Original title: *Science and Civilisation in China*, Cambrige University Press, 1959), I e II Vol., Einaudi.
29. Pizzaleo A. G.(2000), Fuzzy logic. Come insegnare alle macchine a ragionare, Castelvecchi, Roma
30. Radford, L.(2001). On the relevance of Semiotics in Mathematics Education. Paper presented to the Discussion Group on Semiotics and Mathematics Education at the 25th PME International Conference, The Netherlands, University of Utecht, July 12-17, 2001
31. Radford, L.(2001). Sur les modes du savoir, Mémoires de la 3e Université d`été Européenne sur l`Histoire et l`Épistémologie dans l`éducation Mathématique, Université Catholique de Louvain, Louvain-La-Neuve, Belgique Vol.1, 287-296
32. Radford, L. (2000). Signs and meanings in students` emergent algebraic thinking: A semiotic analysis, Educational Studies in Mathematics, 42 (3), 237-268.
33. Radford, L. (1999) The Rhetoric of Generalization, *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Haifa, Technion-Israel Institute of Technology, Vol.4, 89-96
34. Radford, L. (1998) On Signs and Representations. A Cultural Account, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 35 (1), 277-302.
35. Radford, L. (1998), On Culture and Mind, a post-Vygotskian Semiotic Perspective,with an Example from Greek Mathematical Thought, *paper presented atthe 23rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America*,Victoria College, University of Toronto, October 15-18, 1998.
36. Radford, L. (2003), On the epistemological limits of language, Educational Studies in Mathematics, 52 (2), 123/150.
37. Roshdi Rashed (2002), Algebra e linguistica. Gli inizi dell'analisi combinatoria, Storia della Scienza,Istituto della Enciclopedia Italiana Treccani, Roma, pagg 86-93.
38. Sangalli A. (2000), L'importanza di essere fuzzy. Matematica e computer, Bollati Boringheri, Torino.
39. F. Spagnolo (1998), *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, La Nuova Italia, Firenze (Italia).

40. Spagnolo F. (2002), *History and Ethno-Mathematics in the Interpretation of the process of learning/teaching*, 13° ICMI Comparative Study Conference, University of Hong Kong. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/articles.htm
41. Spagnolo F. (2001), Semiotic and hermeneutic can help us to interpret teaching/learning?, Palm Cove (Cairns, Australia), International Conference on Mathematics Education into the 21st Century. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/cairms.htm
42. Spagnolo F. (2002a), Research in mathematics education and history: a semiotic approach, Marrachech, Marocco.
43. Spagnolo F.-Ajello M. (2002b), *Some experimental observations on common sense and fuzzy logic*, Palermo, International Conference on Mathematics Education into the 21st Century. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/palermo2002.htm
44. Spagnolo F. (2003), *The role of history in the interpretation of process of learning/teaching*, 3rd Mediterrranean Conference on Mathematics Education, 3-5 January, Athenes, Editors A. Gagtsis & S. Papastavridis (pp.533-544).
45. Storia della Scienza (2001), *Cina, Indie, Americhe*, Istituto della Enciclopedia Italiana Treccani, Vol. II.
46. Winslow Carl – Emori Hideyo (2002), Elements of a semiotic analysis of the secondary level classroom in japan. ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October.(Faculty of Education, University of Hong Kong, Pokfulam Road).
47. Lotfi A. Zadeh (2001), From computing with numbers to computing with words from manipulation of measurenebts to manipulation of perception, Proceedings, Palermo 2000, "Human and machine perception" (Thinking, deciding and acting), Edited by V. Cantoni, V. Di Gesù, A. Setti e D. Tegolo, Kluwer Accademic, New York.
48. Zheng Yu-xin (2002), Mathematics education in China from a cultural perspective. ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October.(Faculty of Education, University of Hong Kong, Pokfulam Road).

Appendice 1

Logica bivalente e logica fuzzy:

Per **logica bivalente** si intende quella che usualmente chiamiamo *logica*, codificata fin dai tempi di Aristotele, dove una proposizione è vera (valore 1) o falsa (valore 0). Valgono il principio di non contraddizione (non è possibile che una proposizione sia vera e falsa) e il principio del terzo escluso (una proposizione o è vera o è falsa, non esiste una terza possibilità). È' alla base delle dimostrazioni formalizzate.

Logica fuzzy ha due significati. Il primo è quello di **logica polivalente** o "vaga" dove i valori di verità di una proposizione possono variare nell'insieme continuo [0,1] (0 è falso, 1 è vero, gli altri valori hanno una parte di verità e una di falsità). Non è necessario che la legge del terzo escluso, A o non A, valga al 100% e la contraddizione A e non A può valere in misura maggiore dello 0%. Risale agli inizi del secolo.

Il secondo significato, dato da Lofti Zadeh negli anni sessanta, è quello di **ragionamento con insiemi fuzzy o con regole fuzzy.**

Insiemi fuzzy:

Un insieme si di fuzzy se i suoi elementi possono appartenergli del tutto (100%), per niente(0%) ma anche in una certa misura una percentuale compresa tra 0% e 100%). La maggior parte di qualità che variano da un'interpretazione ad un'altra, definiscono insiemi fuzzy: l'insieme delle persone anziane è fuzzy, l'insieme dei gioveni alti è fuzzy, l'insieme dei numeri naturali non è un insieme fuzzy.

Regole fuzzy:

Le relazioni condizionali del tipo **SE X è A, ALLORA Y è B, con A e B insiemi fuzzy**, sono dette regole fuzzy. *"Se la visibilità della strada è poca allora i fari dell'auto devono illuminare molto"*.

Ogni regola definisce una toppa fuzzy (il prodotto AxB) nel sistema *spazio degli stati* - l'insieme di tutti le possibili combinazioni di input e output. Più estesi sono gli insiemi A e B, più estesa e incerta è la toppa fuzzy; la conoscenza più certa, invece, porta a toppe più piccole, ossia a regole più precise. In termini matematici ogni regola fuzzy opera come una memoria associativa che associa la risposta fuzzy B allo stimolo A, inoltre stimoli simili ad A corrispondono a risposte simili a B.

Sistema fuzzy:

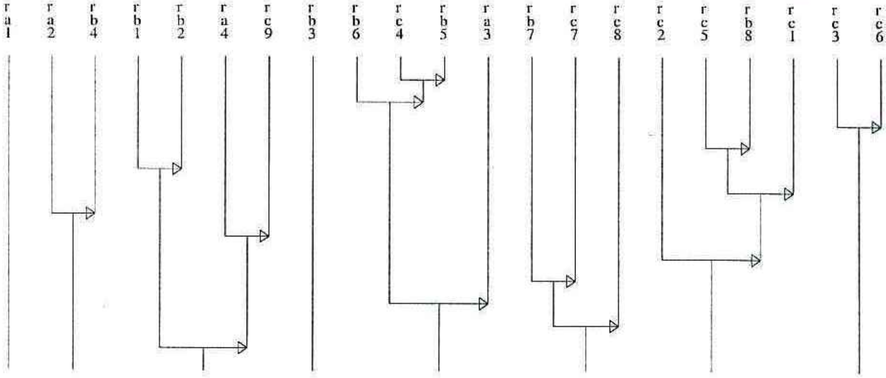
Un **sistema di regole fuzzy** che trasformano input in output è un sistema fuzzy. Ciascun input attiva tutte le regole in determinata misura come in una memoria associativa .Più precisa è la corrispondenza dell'input con la parte del "se" della regola fuzzy, più viene eccitata la parte dell'"allora". Il sistema fuzzy somma tutti questi output o parti dell'"allora" degli insiemi fatti e ne determina la media o il centroide che sarà l'output del sistema.

I sistemi fuzzy adattativo impara le proprie regole dai dati, si comporta come un esperto umano, apprende dall'esperienza e utilizza i dati nuovi per perfezionare il proprio patrimonio di conoscenze.

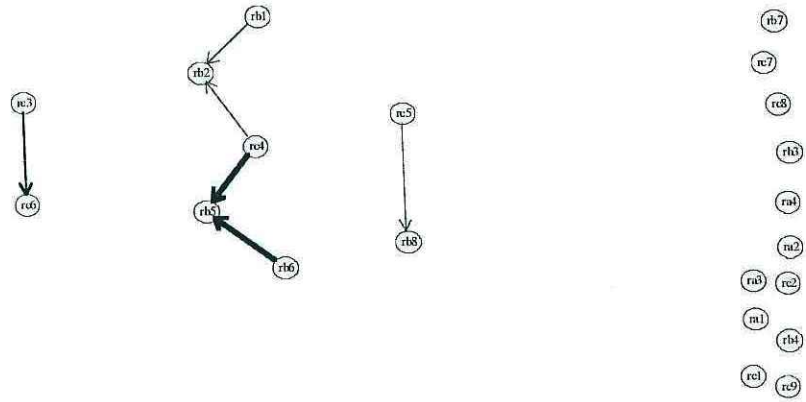
Teorema FAT:

È il **teorema di approssimazione fuzzy** e dimostra che un sistema fuzzy con numero finito di regole, può approssimare in maniera uniforme ogni sistema continuo (Borel- misurabile).

Appendice 2

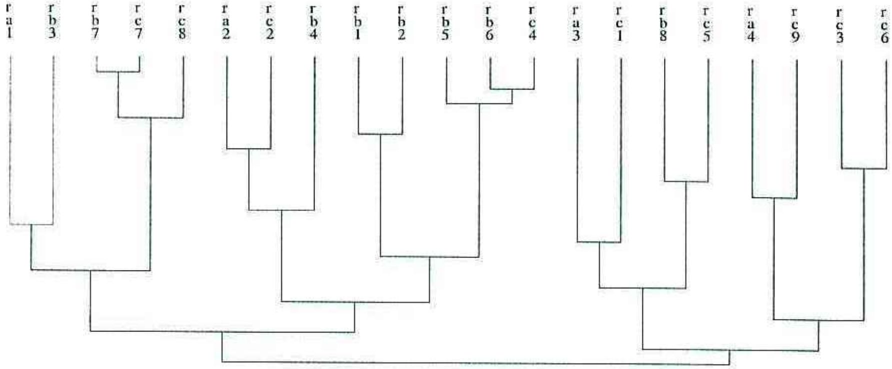


Arbre hiérarchique : C:\Documents and Settings\Filippo Spagnolo\Desktop\fuzzymod.csv



Graphe implicatif : C:\Documents and Settings\Filippo Spagnolo\Desktop\fuzzymod.csv

98 95 90 85



Arbre de similarité : C:\Documents and Settings\Filippo Spagnolo\Desktop\fuzzymod.csv