Un'ipotesi di lezione

Il canto XXXIII del Paradizso
Il perfezionamento angelico dell'umanità di Dante

Il canto XXXIII del Paradiso segna la conclusione dell'esperienza itinerale di Dante. Il poeta è stato introdotto ai diversi gradi della beatitudine celeste dalla sua dolce guida Beatrice ed è sempre riuscito con grande sensibilità artistica a trasferire la meravigliosa visione paradisiaca in luminosi accenti poetici. Ora gli è rimasto l'ultimo atto da compiere, quello conclusivo e certamente il più esaltante del suo viaggio, che lo porrà dinanzi alla infinita grandezza di Dio. Si tratta di una impresa che, come ha notato il Battaglia, "confina con l'assurdo" sia per l'uomo che ne deve essere il protagonista, sia per il poeta che deve tentare di giungere a tanta sublimazione espressiva.

Il canto si apre con la preghiera che San Bernardo rivolge alla Vergine Maria, affinché conceda al pellegrino Dante tanta virtù "che possa con li occhi levarsi / più alto verso l'ultima salute". Il ricorso a San Bernardo per l'invocazione alla Vergine non è casuale, se si pensa con quanta passione e carità il frate abbia contribuito durante la sua vita all'affermazione e alla diffusione del culto della Madonna. Dante stesso poi era un devoto della Madre di Dio, tant'è vero che tutta la finzione poetica e drammatica della commedia nasce dalla pietà e dalla misericordia che Maria provò per Dante, vedendolo solo e smarrito nella selva del peccato. Così il canto conclusivo del poema si richiama al primo canto di introduzione con perfetta coerenza testuale e profonda sintonia spirituale.

Una serie di termini e di espressioni antitetici costituiscono il prologo della mistica preghiera: *Vergine Madre; figlia del tuo figlio; umile e alta*; e, qualche verso più avanti, anche *fattore-fattura*. Il poeta ha fatto ricorso agli strumenti della retorica (ossimoro, allitterazione, antitesi) per indicare la natura eccezionale della Madonna, difficilmente riducibile ad una circoscritta definizione, e per mettere altresì in rilievo l'alta ed insostituibile funzione di Maria mediatrice tra Dio e l'uomo. L' uso della retorica, infatti, non è fine a se stesso e non si risolve tutto nella scelta estetica, ma contribuisce ad esprimere intensamente l'ardore della fede del credente, che si commuove al ricordo di Colei nel cui ventre *"si raccese l'amore, / per lo cui caldo ne l'etterna pace"* è fiorita la candida rosa dei beati.

Gli attributi che esaltano la Madre di Dio sono tutti inerenti alla sua bontà, alla sua misericordia, alla sua pietà. Essa è per i beati *"meridiana face di carità"* e per i mortali *"fontana vivace"* di speranza. La sua luce brilla senza soluzione di continuità tra la terra e il cielo, perché il suo cuore immacolato batte all'unisono col dramma dell'umanità e allo stesso tempo riflette in modo meraviglioso tutta la beatitudine che Dio ha voluto infondere in Lei. Nessuna creatura è più umana di Maria, ma nessuna è più degna del suo creatore.

Dopo le parole di esaltazione della Vergine, la preghiera acquista una sua intima trepidazione: San Bernardo rivolge tutte le sue preghiere alla Regina del cielo, affinché conceda a Dante di gustare nella sua interezza *"il sommo piacer"* della beatitudine eterna, con un ardore di carità solamente concepibile in un'anima affinata dagli insegnamenti cristiani, che sa gioire intimamente della gioia altrui.

Le parole di San Bernardo: *"Tutti i miei preghi Ti porgo, e priego che non siano scarsi"*, sono percorse dall'intima emozione del devoto che sa di chiedere una grazia così eccezionale che solo la Vergine Maria può esaudire, e nel contempo rivelano, con una nota felicissima di umanità, tutta la sollecitudine per Dante: *"Mai per mio veder non arsi / piú ch'ì fo per lo suo"*.

Non è solo san Bernardo a pregare la Vergine, ma con lui tutti gli altri beati *"chiudon le mani"* con devozione e fede.

Il Paradiso è il regno della carità e, come già Piccarda confermò a Dante che nel beato regno la carità *"non serra porte a giusta voglia"*, così anche Maria accoglie *"i devoti preghi"* dei beati e volge i suoi occhi da Dio *"diletti e venerati"* direttamente *"all'etterno lume"*.

Il momento tanto atteso da Dante è vicino: dopo essersi allontanato da *"l'infima lacuna dell'universo "*, dopo aver vedute *"le vite spirituali ad una ad una"* è pronto a ricevere la grazia sovrumana di vedere Dio. L'ardore di tale desiderio ha già consumato tutto il suo animo, talché, ancor prima che San Bernardo col suo amabile sorriso gli accenni di guardare in alto, da sé egli s'è rivolto alla contemplazione del *"Sommo Bene"*.

Per la descrizione del raptus mistico Dante, come osserva il Chimenz, tiene presente la Summa di San Tommaso, da cui riceve quasi "l'autorizzazione teologica a osar di parlare dell'essenza di Dio". Così allo stesso modo di San Paolo, che rapito nel terzo cielo, confessò di non essere in grado né di pensare né di descrivere la vera essenza divina a lui manifestatasi, Dante spiega al lettore di trovarsi nella medesima condizione di chi, dopo aver sognato, porta dentro *"la passione impressa"*, ma non riesce a ricordare quanto ha visto nel sogno. Si tratta forse di una similitudine inadeguata, dal momento che i termini del confronto sono infinitamente distanti, tuttavia essa esprime con grande efficacia il limite delle possibilità umane dinanzi *"a tanto oltraggio"*, rappresentato dalla infinita luce divina. Se la similitudine del sogno serve a spiegare in termini reali lo stato di confusione mentale di chi resta folgorato dalla visione dell'eterno lume divino, la similitudine della neve che si scioglie sotto i raggi del sole, come pure l'immagine del vento, che sconvolge e disperde le foglie su cui la sibilla scrive i suoi vaticini, esprimono la condizione psicologica di chi si sente smarrito per aver perduto la via della verità dopo averla, seppure per un attimo, interamente percorsa. Si avverte, infatti, in tutta la sua intensità il dramma dell'uomo sceso ormai sulla terra che, pur conservando la sublime dolcezza del rapimento mistico, è costretto ad accettare il limite che gli deriva dalla sua natura umana e ad ammettere con umiltà che Dio *"in infinitum excedit humanam facultatem"*.

Se non è possibile ad una creatura umana esprimere la vera essenza della natura divina, tuttavia, in virtú dell'eccezionale esperienza vissuta, è lecito a Dante invocare Dio, affinché gli sia concesso di esprimere almeno *"l'ombra del beato regno"*, come già nel primo canto il poeta ha chiesto. Sennonché l'oggetto dell'invocazione è profondamente mutato: lí Dante era legato soprattutto all'interesse di conseguire la palma della vittoria poetica, qui invece ogni interesse personale appare completamente assorbito dall'ansia di servire Dio, celebrandone l'infinita gloria.

La visione di Dio si manifesta a Dante per tappe successive: egli, come notò il Chimenz, *"non si annega nell'immensità dello stupore e dell'amore, ma studia e misura il progressivo incremento delle sue facoltà umane, e queste accresciute facoltà sprona alla progressiva conquista, fino all'ultimo atto dell'ineffabile dramma"*.

Il suo *itinerarium in Deum* incomincia con la rivelazione di *"ciò che per l'universo si squaderna"* legato insieme al vincolo dell'amore divino. E così nel grande *"volume"* dell'universo può osservare *"sustanze e accidenti"* ed il loro modo di operare, in un rapporto di reciproca ed inseparabile compenetrazione, difficilmente spiegabile in termini linguistici. Dante è convinto di aver visto nella luce di Dio *"la forma universal di questo nodo"* e, senza ricorrere oltre alla terminologia scolastica, evitando ogni spiegazione razionale, risolve nel giubilo, che ancora prova, la ragione del suo credo.

"Un punto solo m'è maggior letargo,/ che venticinque secoli a la impresa / che fe' Nettuno ammirar l'ombra d'Argo". Con questi versi il poeta tenta di esprimere lo stato di smarrimento e di oblio che la sua mente ha provato penetrando nell'essenza di Dio, perché, come scrive San Tommaso *"si richiede infinita efficacia a comprendere Dio, e l'efficacia della creatura in vedere non può essere se non infinita"*.

Così il "letargo" di quell'attimo di beatitudine infinita è tanto più profondo che se fossero trascorsi venticinque secoli, quanti separano Dante dalla mitica impresa degli Argonauti. Un grande fascino dovette esercitare il mito di Giasone nella fantasia di Dante, se è vero che la leggenda degli Argonauti è pure ricordata nel canto XVIII dell'Inferno. Ma se Giasone con la sua ardua impresa aveva fatto stupire il dio degli abissi marini, Dante, novello Giasone, non è indotto dalla sua temerarietà ad intraprendere il viaggio ultraterreno, né la divinità si meraviglia dinanzi alla sua impresa; la sua mistica ascesa è invece espressione di un'esigenza morale ed il suo viaggio è guidato dalla luce della Provvidenza divina, che ha assegnato a Dante l'alta funzione di indicare al genere umano come si possa dalla selva oscura ascendere alla gloria dell'Empireo.

Dante è giunto all'attimo conclusivo e il più esaltante della sua esperienza soprannaturale, quello della rivelazione del mistero dei misteri: la visione della trinità divina. Il poeta avverte la difficoltà e quasi l'impossibilità di ridurre in termini linguistici l'oggetto di tale esperienza e si rende conto che le sue parole suoneranno più confuse ed impacciate del balbettio di un lattante, tuttavia tenta di ridurre entro lo schema rigido di due terzine la grandiosità e la profondità incommensurabile di tale mistero: *"Ne la profonda e chiara sussistenza / de l'alto lume parvemi tre giri / di tre colori e d'una contenenza; / e l'un l'altro come iri da iri / parea riflesso, e '1 terzo parea foco / che quinci e quindi ugualmente si spiri"*.

A proposito di questi versi commenta il Chimenz: *"Il mistero teologico rimane così poeticamente mistero; eppure la fantasia ne ha, direi, la commossa intuizione; ma non è il disegno che suscita la commozione della fantasia, bensì il senso di stupore di quell'incomprensibile rivelazione"*.

Ma ancora un mistero resta a Dante da svelare, quello dell'Incarnazione: quand'ecco che una visione straordinaria si presenta alla sua vista: nel secondo dei tre cerchi, che sembra costituito di luce riflessa, appare dipinta l'effigie umana. Dante vuol vedere *"come si convenne / l'imago al cerchio e come vi s'indova"*, vuol trovare cioè la chiave del più affascinante mistero della fede cristiana; ma per giungere a tanto occorre un ulteriore intervento della Grazia divina: un'improvvisa folgorazione dilata i limiti delle sue capacità intellettive ed il mistero gli si rivela.

Dante ha raggiunto il momento culminante del "perfezionamento angelico della sua umanità" (Chimenz) ed ora che i suoi desideri e la sua volontà sono perfettamente in armonia con il volere divino può partecipare con gli altri beati della gloria e dell'amore di Chi *"move il sole e l'altre stelle"*.

ANTONINO TOBIA

BREVE NOTA BIBLIOGRAFICA

M. Fubini: *Due studi danteschi,* Firenze, Sansoni 1951.

S. Chimenz: Il canto XXXIII del *Paradiso*,"Nuova lectura Dantis". Roma, Signorelli 1951.

E. Robert Curtius: *Studi di letteratura europea,* trad. di Ritter Santini. Bologna, Il Mulino1953.

S. Battaglia: *Il canto XXXIII del Paradiso*, Torino, S.E.I. 1965.

Dante e la matematica

Italo D'Ignazio*

1. Introduzione

Rileggiamo la parte finale del XXVII canto del Paradiso: Beatrice ha appena spiegato a Dante che il nono cielo, dove si trovano, è il Primo Mobile da cui deriva il movimento di tutti i cieli; ciò l'ha portata a considerare come poco gli uomini guardino il cielo, come presto l'innocenza si corrompa: manca in terra un saggio governo e la famiglia umana si svia;

Ma prima che gennaio tutto si sverni
per la centesma ch'è là giù negletta

tutto cambierà *e vero frutto verrà dopo il fiore.*

Quale è l'esatta interpretazione *letterale* da dare ai due versi sopra riportati? Come è possibile che gennaio si *sverni,* ossia diventi un mese non più invernale? e in che consiste la *centesma negletta*? All'epoca di Dante era ancora in vigore il calendario giuliano, nel quale il tempo intercedente tra due successivi passaggi del sole su uno stesso punto equinoziale era considerato di 365 giorni e 6 ore, per cui, come del resto facciamo oggi, ogni quattro anni si faceva ricorso all'anno bisestile di 366 giorni. Sennonché il tempo effettivamente impiegato dal sole per due successivi passaggi all'equinozio è un po' inferiore a quello messo in conto nel calendario di Giulio Cesare; più precisamente, è di $365^d 5^h 48^m 46^s$ con una differenza in meno di $11^m 14^s$, ossia circa 1/100 di giorno (esattamente, 78/10000 di giorno): è questa frazione che Dante chiama *la centesma ch'è là giù* (cioè sulla terra) *negletta.* Questo piccolo eccesso presente nel calendario giuliano comportava uno scostamento

* Ex-Presidente della sezione Mathesis di Teramo, e-mail: idignaz@tin.it

crescente dell'andamento indicato dal calendario dal tempo solare. All'epoca di Dante si era accumulata una differenza di circa 10 giorni. Si capisce, ora, come , per l'accrescersi di questo divario, il gennaio del calendario giuliano potesse diventare un mese non più invernale ma primaverile. Gli scostamenti progressivamente maggiori erano già stati osservati dagli astronomi medioevali e Dante, uomo di vasta erudizione, ne era a conoscenza.

Come si vede, la corretta interpretazione dei due versi richiede un discorso alquanto complesso e minuzioso, che non può farsi senza un'adeguata informazione sulla scienza medioevale, con la quale Dante ebbe grande familiarità.

La *Divina Commedia* è stata definita una enciclopedia del Medio Evo in versi. E ciò ribadisce quanto abbiamo detto or ora: una vera e piena comprensione del poema non è possibile al lettore che, pur in possesso di buona cultura, non abbia conoscenze specialistiche intorno alle concezioni del mondo, alla cultura e alla scienza di Dante e della sua epoca. Il problema viene risolto, nella stragrande maggioranza dei casi, con la consultazione delle note esplicative degli ottimi e numerosi commenti che accompagnano i testi, scolastici e non, della Divina Commedia, frutto di un lavoro paziente, accurato e plurisecolare. Tuttavia una miglior conoscenza di Dante come *scienziato medioevale,* consentirebbe una più immediata e diretta lettura e soprattutto una penetrazione più profonda della poesia dantesca, inseparabile dalla struttura del poema. Inoltre, per rimanere nell'ambito della scuola secondaria, farebbe cogliere ai giovani aspetti insospettati e perciò sorprendenti della personalità di Dante e della sua opera.

Il tema della "scienza in Dante" è però di tale ampiezza e profondità da far "tremar le vene e i polsi". Noi lo circoscriveremo alla sola matematica e, anche in questo già ristretto settore, ci limiteremo ad una breve raccolta e commento di alcuni passi danteschi nei quali si evidenzia il sapere matematico del Nostro, senza la pretesa di esaurire l'argomento, ma solo animati dall'intento di illustrare e sottolineare alcuni aspetti poco conosciuti della genialità di Dante.

2. Le conoscenze matematiche di Dante

Si ritiene che Dante avesse cognizioni matematiche adeguate all'effettuazione di calcoli astronomici; in ciò si serviva del sistema di numerazione romano e dei procedimenti operativi, assai lunghi e laboriosi, che quel sistema richiedeva, invece di servirsi del ben più agile e spedito sistema di numerazione basato sulle cifre arabiche (in sostanza, quello che noi usiamo presentemente), che pur era già noto allora in Italia e nell'occidente, introdottovi da Leonardo Fibonacci Pisano con la pubblicazione, nel 1202, del suo *Liber Abaci.*

La cultura matematica, e scientifica in genere, degli studiosi medioevali si formava principalmente su manuali compilati nel quinto e nel sesto secolo d.C., prima che il buio del medioevo avvolgesse tutto nell'ombra, dagli ultimi epigoni della cultura classica, come Marziano Capella[1], Boezio[2], Cassiodoro[3]. A queste opere attinse anche Dante, ma non soltanto ad esse. Nella seconda metà del secolo XIII erano a disposizione degli studiosi anche le traduzioni dall'arabo in latino dei grandi scienziati greci dell'antichità (Euclide, Archimede, Apollonio, Tolomeo, ecc.) e i più modesti lavori di eruditi medioevali (Isidoro di Siviglia, Beda il Venerabile, Alcuino, Gerberto, Alberto Magno) che, seppur privi di originalità, avevano avuto il merito di tenere accesa la fiammella della

---

[1] Marziano Mineo Felice Capella aveva composto, verso il 470, una specie di enciclopedia *("De nuptiis Philologiae et Mercuri")*, che ebbe larga diffusione nel medioevo. L'autore vi narra che Filologia, dovendo andar sposa a Mercurio, presentò come dono di nozze sette ancelle, cioè le Arti liberali (Grammatica, Retorica, Dialettica, Geometria, Aritmetica, Astronomia e Musica). Di ciascuna parla diffusamente, svolgendo le relative dottrine, ma per la geometria si limita ad una disordinata raccolta di enunciati, senza dimostrazioni né chiarimenti.

[2] Severino Boezio (480-524), l'ultimo dei filosofi antichi ed il primo dei medioevali, operò anche nel campo del sapere matematico, traducendo in latino alcuni libri di Euclide e compilando due libri di *Arithmetica;* però la *Geometria Euclidis a Boetio in latinum lucidius translatus,* per lungo tempo attribuitagli, non è opera sua, come hanno riconosciuto gli storici della matematica del secolo scorso. Peraltro, essa contiene solo gli enunciati, senza dimostrazioni, dei primi quattro libri di Euclide oltre ad una raccolta di problemi non priva di errori.

[3] Cassiodoro Flavio Magno Aurelio (480-575), senatore. Autore di diversi scritti e benemerito della cultura perché, precorrendo i padri benedettini, raccolse, studiò e fece copiare i monumenti della letteratura e della scienza antiche, conservandoli, così, ai posteri.

cultura matematica nei secoli in cui l'ondata di barbarie minacciava di spegnerla definitivamente. Dante conobbe certamente gli *Elementi* di Euclide, ma non le opere di Archimede e di Apollonio. Quanto alle conoscenze astronomiche, si ritiene che egli le attinse da Aristotele piuttosto che da Tolomeo. Stranamente, Dante mostra di non conoscere Leonardo Fibonacci Pisano[4] (1170-1250), il grande matematico da cui ebbe inizio la rinascita della matematica nella cultura occidentale, suo corregionale ed a lui di poco anteriore; o forse lo conobbe ma non lo apprezzò: è possibile che al poeta della cristianità, al grande estimatore della civiltà latina, quel sistema di numerazione che il Pisano aveva portato in occidente dalle terre degli infedeli non piacesse[5].

3. La matematica nella Divina Commedia

1) La progressione degli scacchi

L'incendio suo seguiva ogni scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi s'immilla.
(Par., XXVIII, 91-93)

Qui Dante dice che le scintille (simboleggianti le intelligenze angeliche) erano così numerose, che neanche il progressivo raddoppiare degli scacchi raggiunge tante migliaia. Con questo paragone allude alla leggenda, assai nota, del compenso che sarebbe stato richiesto dall'inventore del gioco degli scacchi. Secondo questa leggenda, l'inventore fu l'indiano Sissa, che un giorno volle presentare il gioco al suo re, il maragià Scheran. Questi ne rimase entusiasta e dichiarò di voler

---

[4] Il Fibonacci, nella prefazione del suo *Liber abaci,* dichiara che avrebbe dimostrato tutte le asserzioni via via enunciate "in modo che il popolo latino non si trovi, come è accaduto fino ad ora, senza questa scienza". In questo programma c' è il pieno, effettivo ritorno alla vera grande matematica degli autori greci. E' quindi con il Fibonacci che s'inizia il rinascimento scientifico, che precede di poco quello letterario.

[5] Un articolo dello Statuto dell'Arte del Cambio di Firenze, redatto nel 1299, vietava l'uso delle cifre arabiche; questo perché, secondo un'opinione diffusa, esse si prestavano a falsi , contrariamente alle cifre romane. Dunque, un pregiudizio nei confronti della numerazione di Fibonacci, all'epoca esisteva.

compensare Sissa con qualunque cosa gli avesse chiesto; e Sissa rispose che si sarebbe accontentato, bontà sua, di un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, 2 per la seconda, 4 per la terza e così via raddoppiando. D'acchito la richiesta sembrò troppo modesta ma, a conti fatti, Scheran trovò che tutte le sue immense ricchezze non sarebbero bastate a soddisfarla. Proviamo anche noi a fare i conti. I chicchi di grano corrispondenti a ciascuna casella determinano una *progressione geometrica di ragione 2:*

$$1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{63}.$$

Tenendo conto che la somma dei termini di una progressione geometrica è:

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

(a_1 = primo termine; q = ragione; n = numero dei termini) troviamo subito che il numero dei chicchi di grano necessari soddisfare le "miti" pretese di Sissa è $1{,}844 \cdot 10^{19}$, ossia più di diciotto miliardi di miliardi. Proviamo ad andare un po' oltre nel nostro conteggio; supponendo che un chicco di grano pesi un centesimo di grammo, per soddisfare la richiesta occorrerebbero 1844 miliardi di quintali; l'intera produzione mondiale annua di grano è, oggi, di "appena" 5,7 miliardi di quintali!

Il gioco degli scacchi è molto antico. Probabilmente ideato in India, da qui passò in Persia e poi si diffuse negli altri paesi. Nell'800 dopo Cristo era noto alla corte degli imperatori d'oriente. In Italia fu portato dai reduci della prima Crociata. Dante lo conosceva e conosceva la leggenda di cui mirabilmente si servì per significare l'immensità del numero degli angeli.

2) Dante e π

Qual è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,

tal era io a quella vista nova:
veder volea come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;

ma non eran da ciò le proprie penne.
(Par., XXXIII, 133-139)

Siamo alla conclusione del poema. Il poeta è di fronte all'ultima visione, cioè al mistero della coesistenza della natura umana e divina nel Cristo. Il suo sforzo per capire è ugualmente immane ed ugualmente vano di quello del geometra che si concentra sul problema della quadratura del cerchio. L'ultima similitudine del poema è fondata su una ricerca di verità matematica, come del resto già altre prima.

Ricordiamo brevemente il problema della *quadratura del cerchio*, che ha assillato le più alte intelligenze dell'umanità per millenni. Esso consiste nel costruire un quadrato avente la stessa area di un cerchio dato. Se ci si limita all'uso dei soli strumenti classici del disegno, cioè della *riga* (non graduata) e del *compasso,* questo problema è *insolubile*, anzi è insolubile anche se si dispone di strumenti capaci di tracciare *curve algebriche*. Solo ricorrendo a strumenti adatti a tracciare certe particolari *curve trascendenti*, come l'integrafo, è possibile ottenerne la risoluzione. Non si tratta, quindi, di un problema impossibile in assoluto (come comunemente si crede) bensì *relativamente* a certi strumenti. Questo noi sappiamo oggi, da quando, nel 1882 Lindmann, chiudendo una plurimillenaria questione, dimostrò *che π è un numero trascendente*.

Ricordiamo che la geometria analitica insegna ad associare ad ogni curva una propria equazione, che la rappresenta. L'equazione è caratterizzata dalla proprietà di essere verificata dalle coordinate di tutti e solo i punti che stanno sulla curva. Una curva è *algebrica* se la sua equazione cartesiana *si può* scrivere nella forma $P(x,y)=0$, dove $P(x,y)$ è un polinomio nelle variabili x,y; in caso contrario è *trascendente*.

Per esempio, l'equazione $2x^2+3y^2-1=0$ (nella quale il primo membro è un polinomio) rappresenta un'ellisse, che perciò è una curva algebrica. L'equazione $tg\frac{\pi y}{2}-\frac{y}{x}=0$ (il cui primo membro non è riducibile ad un polinomio) rappresenta la quadratrice di Dinostrato, che perciò è una curva trascendente.

Il problema della quadratura del cerchio e della sua risolubilità con certi strumenti è intimamente legato alla conoscenza del rapporto della circonferenza con il proprio diametro (cioè di π) e con la *natura* di questo numero. I geometri greci, che pur avevano trovato la soluzione mediante curve trascendenti, non si contentavano di questa ma pretendevano di arrivarvi con riga e compasso, ossia utilizzando solo rette e circonferenze. Le ricerche sull'argomento svolte negli ultimi tre secoli hanno chiarito che ciò non è possibile. Il matematico impegnato qualche secolo fa in questi studi, non conoscendo l'esatto valore di π nè la sua natura, ragionava pressappoco così: "se π fosse un numero razionale (per esempio uguale a 22/7=3,142..., come per gran tempo si è creduto e sperato), la quadratura sarebbe facilmente effettuabile con riga e compasso; se π fosse un numero irrazionale la questione non si potrebbe decidere sulla base di questa sola informazione: per esempio, la quadratura sarebbe ancora possibile, sempre con riga e compasso, se fosse $\pi=\dfrac{13\sqrt{146}}{50}=3{,}14159\ldots$, mentre sarebbe impossibile se fosse $\pi=\sqrt[5]{306}=3{,}14155\ldots$. (In altre parole, la sola irrazionalità di π non consente di concludere, occorre appurare qualche altra cosa). Se, però, π fosse (come si è poi accertato) trascendente la questione sarebbe chiusa, sia pur negativamente, cioè con l'impossibilità della quadratura per via elementare". Come si è detto, la trascendenza di π fu dimostrata da Lindmann in tempi assai vicini al nostro (1882). Ricordiamo che i numeri trascendenti sono dei particolari numeri irrazionali caratterizzati dalla proprietà di *non essere* radici di qual si voglia equazione algebrica a coefficienti interi.

La questione del calcolo e della natura di π fu affrontata con metodi empirici già nelle civiltà pre-elleniche. Poi, quando i greci introdussero il metodo deduttivo, se ne occuparono tutti i maggiori matematici e filosofi dell'epoca, ma fu Archimede a dare le prime risposte pienamente soddisfacenti sia nel metodo che nei risultati. Egli stabilì per π la seguente limitazione:

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{10}{70} \qquad \text{ossia} \qquad 3{,}1408\ldots<\pi<3{,}1428\ldots$$

Archimede indicò anche in 22/7 (=3+10/70) il valore approssimato di π più semplice e conveniente nelle applicazioni pratiche. E' chiaro dai suoi scritti che egli riteneva la quadratura conseguibile solo attraverso un procedimento indefinito di approssimazioni successive, e ciò implica che π sia irrazionale. Ma nel Medio Evo si tornò alla speranza che fosse razionale. Ad Archimede si riallacciò, invece, Fibonacci che, riprendendone il metodo, diede di π una valutazione ancora migliore trovando la limitazione:

$$\frac{1440}{458+4/9} < \pi < \frac{1440}{458+1/5} \quad \text{ossia} \quad 3{,}14105\ldots < \pi < 3{,}14273$$

Abbiamo accennato poco fa alla circostanza che i matematici medioevali ritornarono alla convinzione che π fosse razionale ed i più indicarono come esatto il rapporto archimedeo 22/7 che, pur essendo comodo nella pratica, è solo un valore approssimato. Fece eccezione il Fibonacci, ma Dante non lo conosceva, come non conosceva Archimede. Eppure egli mostra in tutta evidenza nei versi sopra riportati, ed ancor più esplicitamente nel *Convivio* ("il cerchio per lo suo arco è impossibile a quadrare perfettamente", Conv. II, 13) la sua convinzione della impossibilità della quadratura ("il principio ond'elli indige", il principio, cioè, di cui manca il "geomètra" per poter "misurar lo cerchio" è, appunto, il nostro π). Sicché viene spontaneo chiedersi: - Ma allora Dante da chi ha tratto la nozione dell'impossibilità di quadrare il cerchio?- Forse se avessimo a disposizione tutti i trattati medioevali che si sono occupati della questione e sono andati perduti troveremmo la risposta; o, forse, è anche plausibile l'ipotesi che fu lui, Dante, con il suo genio, a intuire la verità pur senza darne la ragione.

3) Gli angoli interni del triangolo.

Una fondamentale proprietà assicura che la somma degli angoli interni di qualsiasi triangolo è uguale ad un angolo piatto. Ne consegue che in un triangolo non vi possono mai essere due angoli ottusi, né due retti e neanche un retto ed un ottuso. Questa proprietà offre a Dante materia per un'altra bella similitudine: il suo avo Cacciaguida, che incontra nel cielo di Marte, discerne nella vista di Dio il futuro con la stessa chiarezza con cui noi terreni vediamo l'impossibilità che un triangolo abbia due angoli ottusi:

"O cara piota mia che sì t'insusi,
che come veggion le terrene menti
non capere in triangol due ottusi,

così vedi le cose contingenti
anzi che sieno in sé, mirando il punto
a cui tutti li tempi son presenti;"

(Par., XVII, 13-18)

Verosimilmente, Dante ha attinto questa nozione geometrica da Euclide, o da Aristotele, o da Boezio, i quali, però, mai parlano esplicitamente di angoli ottusi, bensì si riferiscono agli angoli retti, Dante, dunque, l'ha dedotta (se è impossibile che un triangolo abbia due retti, a maggior ragione non può avere due ottusi; osserviamo, di passaggio, che questa proposizione non sarebbe logicamente invertibile: l'impossibilità di due ottusi non escluderebbe la possibilità di due retti). Potremmo dire, pertanto, che, nell'occasione, Dante è stato "sovrabbondante": mentre la legge del minimo mezzo avrebbe suggerito due retti, egli si è servito di due ottusi. Perché? se è vero, come è stato detto, che Dante non fa nulla senza ragione un motivo deve esserci. E potrebbe essere davvero sorprendente.

Se ci riferiamo alla geometria non euclidea sopra una superficie sferica nella quale le "rette" si identificano con le geodetiche (le circonferenze ottenute dalle sezioni delle superfici sferiche con piani passanti per il centro), *un triangolo può ben avere due angoli retti ma non può mai avere due angoli ottusi.* E' possibile che Dante, anticipando i tempi, abbia intuito la possibilità di una tal geometria? Se si potesse dare risposta affermativa a questa domanda resterebbe spiegata la preferenza per gli angoli ottusi.

L'impossibilità che un triangolo abbia due retti o due ottusi è conseguenza del teorema secondo il quale la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto. Questo teorema non è dimostrabile senza far uso del quinto postulato di Euclide (" per un punto si può condurre una retta, ed una sola, parallela ad una retta data"). Ma un postulato è una affermazione che si chiede di accettare senza dimostrazione. Ora il quinto di Euclide non è così evidente come gli altri, soprattutto non è suscettibile di una verifica sperimentale. Da qui lo sforzo dei matematici, a cominciare proprio da Euclide, di dimostrarlo, cioè di trasformarlo in teorema. Ma i tentativi non ebbero successo e le ricerche che ne nacquero diedero origine alla famosa questione delle parallele che sfociò , dopo oltre duemila anni, nella costruzione delle geometrie non-euclidee ad opera di Bolyai, Lobatcewskij ed altri. La geometria sopra una superficie sferica è una geometria non-euclidea nella quale, non valendo il quinto postulato, non vale neanche il teorema degli angoli interni di un triangolo. In essa la somma degli angoli interni è maggiore di un angolo piatto. Della teoria delle parallele si occupò anche Aristotele, che Dante ben conosceva. Aristotele intendeva dare a questa teoria un assetto logicamente ineccepibile, ma si scontrò proprio con le difficoltà insite in quella "verità" che, poco dopo, Euclide doveva limitarsi a postulare. *L'ipotesi che Dante abbia recepiti e fatti suoi i dubbi di Aristotele e di Euclide e per questo abbia preferito gli angoli ottusi, per quanto audace, non può escludersi.*

4)- Il triangolo iscritto in una semicirconferenza ha, necessariamente, un angolo retto.

San Tommaso spiega a Dante che Salomone chiese a Dio il dono della sapienza per essere veramente un re degno, non per penetrare nella scienza teologica, o nell'astrologia, o nella metafisica,

o se del mezzo cerchio far si puote
triangol sì ch'un retto non avesse.
(Par., XIII, 101-102)

Anche qui Dante fa ricorso ad una proprietà geometrica per esprimere un concetto. La proprietà è quella, ben nota, relativa ai triangoli inscritti nella semicirconferenza: *Ogni triangolo che abbia come uno dei lati il diametro di una semicirconferenza ed il vertice opposto a questo sulla semicirconferenza stessa ha, necessariamente, un angolo retto.*

La nozione è tratta dal libro III degli Elementi di Euclide.

4. La matematica in altre opere di Dante

Anche in altre opere dantesche compaiono riferimenti a verità matematiche che dimostrano la buona dimestichezza del poeta con questa disciplina. Nella *Vita Nova* c'è un chiaro riferimento al concetto di radice quadrata, nelle *Rime* un ben più importante riferimento al concetto di infinito. Nella *Quaestio de aqua et terra* Dante rielabora in modo personale la definizione di sfera ed enuncia una proprietà dei cerchi che non si trova (almeno in modo esplicito) nella trattatistica disponibile nel XIII secolo. Ed ancora, nel *Convivio* istituisce confronti di straordinaria acutezza tra il cielo di Giove e la Geometria e tra il cielo del Sole e l'aritmetica. Leggiamo insieme quest'ultimo:

"E 'l cielo del Sole si può comparare all'Arismetica per due proprietadi, l'una si è, che del suo lume tutte l'altre stelle s'imformano; l'altra si è, che l'occhio nol può mirare. E queste due proprietadi sono nell'Arismetica, ché del suo lume tutte le scienze s'alluminano; perocché i loro suggetti sono tutti sotto alcuno numero considerati, e nelle considerazioni di quelli sempre con numero si procede. Siccome nella scienza naturale è suggetto il corpo mobile, lo qual corpo mobile ha in sé ragione di continuità, e questa ha in sé ragione di numero infinito. E della naturale scienza, la sua considerazione principalissima è

considerare li principi delle cose naturali, li quali sono tre, cioè materia, privazione e forma; nelli quali si vede questo numero, non solamente in tutti insieme, ma ancora in ciascuno è numero, chi ben considera sottilmente. Per che Pittagora, secondoché dice Aristotele nel primo libro della Fisica, poneva i principi delle cose naturali lo pari e la dispari, considerando tutte le cose essere numero. L'altra proprietà del Sole ancora si vede nel numero, del qual è l'Arismetica, ché l'occhio dell'intelletto nol può mirare: perocché il numero, quando è in sé considerato è infinito; e questo non potemo noi intendere"

In questo passo Dante, oltre ad affrontare il contrastato concetto di *infinito*, esprime un'idea di stupefacente modernità: come il sole illumina gli altri cieli, così l'aritmetica illumina tutte le altre scienze. Concordemente, i moderni considerano le varie scienze, anche quelle umane, tanto più progredite quanto più fanno uso della matematica, quanto più riescono ad associare numeri a fenomeni, quanto più esprimano le loro leggi nel linguaggio univoco e rigoroso della matematica. "Conoscere è misurare" è stato detto. Reciprocamente, il progresso della matematica si fa consistere nell'ampliare e rendere sempre più generali ed astratti i suoi procedimenti, in modo da rendere questi sempre più utilizzabili dalle altre scienze, anche da quelle che tradizionalmente non ne hanno mai fatto uso.