GEOMETRIA SINTETICA E NUOVE TECNOLOGIE

Italo D'Ignazio°, Ercole Suppa♣, Raffaele Mascella*

SUNTO – Viene messo in risalto il valore formativo dell'insegnamento della geometria euclidea ed, in particolare, della risoluzione dei problemi geometrici per via sintetica. Si accenna alle possibilità didattiche offerte da alcuni programmi informatici (il CABRI). Si danno alcuni esempi di risoluzione di problemi geometrici.

ABSTRACT – In this paper we put in evidence the formative value of the teaching of euclidean geometry and, particularly, of the resolution of the geometric problems by synthetic way. We mentions the didactic possibilities offered by some computer programs (Cabri). We give some examples of resolution of geometric problems.

1. Introduzione

Questa nota nasce sulla scia del manuale recentemente pubblicato da D'Ignazio e Suppa [1], col quale gli autori tentano un rilancio del *metodo sintetico* nella risoluzione dei problemi geometrici abitualmente trattati nelle scuole secondarie. Questo metodo, un tempo tenuto in grande considerazione, è stato progres-

° Ex-Presidente della sezione Mathesis di Teramo, e-mail: idignaz@tin.it
♣ Liceo Scientifico Statale "A. Einstein", Teramo, e-mail: ercsuppa@tin.it
* Dipartimento M.E.T. dell'Università di Teramo, e-mail: rmascella@tin.it

sivamente abbandonato a favore di quello *analitico*, ritenuto più sistematico e generale nonché più consono alle possibilità di allievi con età compresa tra i quindici ed i diciannove anni. Ma ciò ha prodotto l'esaltazione di un automatismo eccessivo, a scapito del ragionamento. Si è constatato, con preoccupante frequenza, che allievi discretamente dotati, ma che hanno appreso la geometria ricorrendo soprattutto alle *formule* ed agli *algoritmi*, risolvono facilmente i problemi tipici, ma sbagliano o si arrestano di fronte a quelli non tipici, perché assai spesso *la formula non può sopperire al buon senso, né il procedere automatico alla deduzione logica.*
Da più parti si auspica un "ritorno" alla geometria euclidea, come insegnamento particolarmente adatto per l'acquisizione di capacità deduttive, di rigore logico, di analisi; né si trascura il contributo che questo insegnamento può dare al miglioramento delle capacità espositive dell'alunno, esercitandolo ad un discorso sobrio, pacato, essenziale, conseguente. In altri termini, si sta prendendo coscienza della necessità di conciliare la sistematicità e generalità del metodo analitico con la semplicità e l'eleganza del metodo sintetico.
Ma un'altra importantissima ragione milita a favore della ripresa e del potenziamento dello studio della geometria sintetica: il diffondersi di programmi informatici per l'insegnamento della geometria che, consentendo la costruzione di figure *deformabili con continuità* (mentre si conservano le proprietà utilizzate per costruirle), permettono di evidenziare o di intuire certe relazioni geometriche, dando così la possibilità di fare ipotesi e avanzare congetture, da passare successivamente al vaglio della deduzione logica. Intuire una "verità", precisarla enunciando una congettura, attivarsi a dimostrarla è una fase essenziale per la costruzione di qualsiasi disciplina scientifica, cosicchè l'uso di questi programmi informatici costituisce un mezzo quanto mai efficace per la creazione di una "forma mentis" adatta allo studio della scienza.
Nelle pagine che seguono vengono presentati:

- un semplice problema per il quale vengono messe a confronto la risoluzione analitica con quella sintetica.
- i cerchi gemelli di Archimede ed una loro generalizzazione.
- esempi di ricerche di luoghi, per le quali ci si serve dell'aiuto del Cabri-Géomètre.

2. Problemi di costruzione

In questo paragrafo eamineremo la risoluzione, sia analitica che sintetica, di due tipici problemi di costruzione, i problemi A e B, e la risoluzione di una generalizzazione del secondo, ovvero il problema C.

2.1. Problema A

Il primo problema di costruzione che proponiamo è il seguente:
Costruire un triangolo rettangolo date l'ipotenusa a e la somma dei cateti s.

Risoluzione sintetica

Supposto il problema risolto, sia ABC il triangolo richiesto, rettangolo in A.
Se prolunghiamo il cateto BA di $AD = AC$ risulta $B\hat{D}C = 45°$ per cui il triangolo BDC è costruibile a partire dai dati (sono noti un angolo e due lati: $B\hat{D}C = 45°$, $BD = s$, $BC = a$). Costruito BDC, basta tracciare da C la perpendicolare CA al lato BD per ottenere il triangolo voluto ABC.
La figura può essere facilmente realizzata con il CABRI.

- Fig. 1 -

Risoluzione analitica

I cateti x, y del triangolo richiesto soddisfano il sistema simmetrico

$$\begin{cases} x + y = s \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{s^2 - a^2}{2} \\ x + y = s \end{cases}$$

quindi sono le radici dell'equazione

$$z^2 - sz + \frac{s^2 - a^2}{2} = 0$$

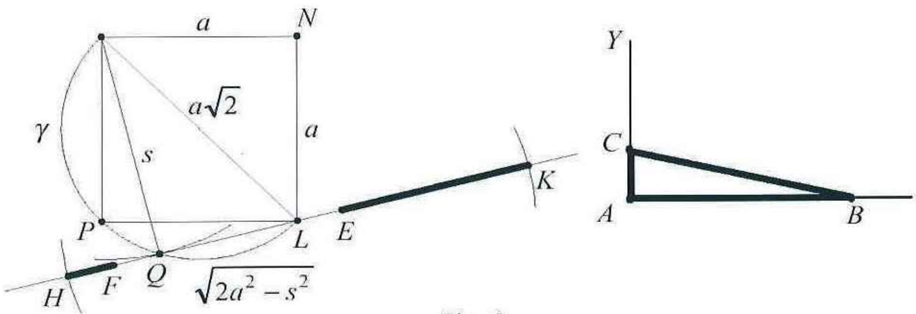
ovvero

$$z_{1,2} = \frac{s \pm \sqrt{2a^2 - s^2}}{2}$$

Molto spesso nei testi scolastici il problema a questo punto si considera concluso e si trascura l'effettiva costruzione della figura. A nostro avviso, invece, la realizzazione della figura è didatticamente significativa anzi, "dal punto di vista geometrico è essenziale" [2]: senza ciò la vera natura del problema non viene pienamente compresa dall'allievo; a volte, viene addirittura travisata.
Possiamo ottenere questa costruzione nel modo seguente (fig. 2):

1) costruiamo un quadrato $MNLP$ di lato a e tracciamone la diagonale ML;
2) tracciamo la semicirconferenza γ di diametro ML; essa passa per P;

3) tracciamo la circonferenza di centro M e raggio s e sia Q la sua intersezione con γ;
4) tracciamo la circonferenza di centro L e raggio s che interseca la retta QL in H e K;
5) detti E, F i punti medi di QK , QH risulta che i segmenti EK e HF sono i cateti del triangolo voluto (infatti $LH = LK = s$ e $QL = \sqrt{2a^2 - s^2}$);
6) tracciate due semirette perpendicolari AX, AY prendiamo su di esse, rispettivamente, i punti B, C tali che $AB = EK$ e $AC = HF$. ABC è il triangolo richiesto.



- Fig. 2 -

2.2. Problema B: i cerchi gemelli di Archimede

Su un segmento AB prendiamo un punto C, tracciamo le circonferenze di diametri AC, CB, AB e la corda DD' perpendicolare ad AB in C. La figura delimitata dai semicerchi di diametri AC, CB, AB (detta arbèlo) fu studiata da Archimede nel libro dei Lemmi. Nella proposizione V viene dimostra-to che i cerchi (W_1), (W_2) inscritti nei triangoli mistilinei ACD, CDB, delimitati dalla semicorda CD e dai semicerchi, hanno lo stesso raggio AC × CB /AB (Fig. 3).

Calcolo del raggio di (W_1)

Indicati con H_1, a, b, p rispettivamente la proiezione di W_1 su AB ed i raggi di (O_1), (O_2), (W_1), dal teorema di Pitagora si ha:

$$(O_1W_1)^2 - (O_1H_1)^2 = (OW_1)^2 - (OH_1)^2$$

$$(a+p)^2 - (a-p)^2 = (a+b-p)^2 - (a-b-p)^2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{ab}{a+b} \tag{1}$$

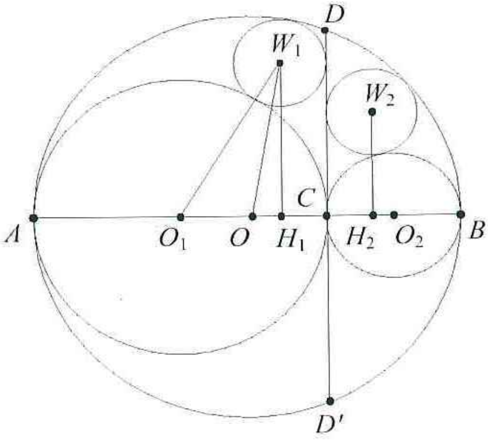
Costruzione geometrica di (W_1)

Il centro W_1 è l'intersezione della circonferenza di centro O_1 e raggio $a + p$ con la retta luogo dei punti distanti p da CD (situata nel semipiano di origine CD contenente A). Pertanto (W_1) può essere costruito con il CABRI nel modo seguente:

1) segmento AB
2) punto medio di AB [punto O]
3) circonferenza di centro O passante per A
4) punto su segmento AB [punto C]
5) punto medio di AC [punto O_1]
6) circonferenza di centro O_1 passante per A
7) punto medio di CB [punto O_2]
8) circonferenza di centro O_1 passante per B
9) perpendicolare ad AB passante per C [retta s]
10) intersezione tra s ed (O) [punti D, D']
11) semiretta O_1D
12) intersezione tra O_1D ed (O_1) [punto E]
13) retta EO_2
14) retta per B parallela ad EO_2 [retta t]
15) intersezione tra t ed O_1D [punto F]
16) compasso (di raggio EF e centro C) [circonferenza h]
17) intersezione tra h ed AC [punto H_1]
18) retta per H_1 perpendicolare ad AB [retta u]
19) circonferenza di centro O_1 passante per F [circonferenza k]
20) interesezione tra u e k [punto W_1]
21) compasso (di raggio EF e centro W_1)

(W_1) è il cerchio inscritto nel triangolo mistilineo ACD. La costruzione del cerchio (W_2) è analoga.
Il lettore interessato può confrontare la costruzione esposta con quella data in [1, pag. 224], realizzata mediante l'inversione circolare.

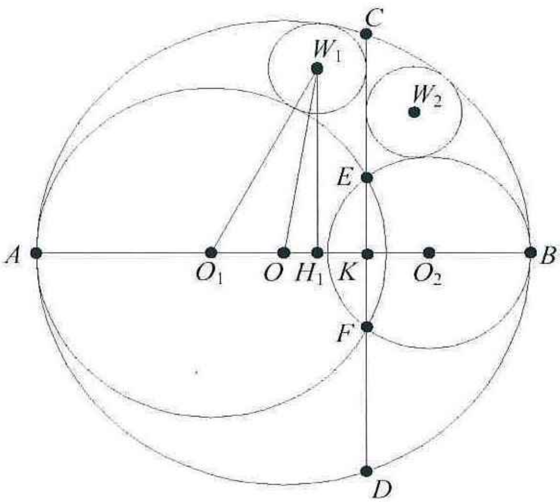
- Fig. 3 -



2.3. Problema C: una generalizzazione dei cerchi di Archimede

L'esempio precedente si presta ad un'interessante generalizzazione: se (O_1) ed (O_2) sono secanti o sono uno esterno all'altro e CD è il loro asse radicale, i cerchi (W_1) e (W_2) hanno ancora lo stesso raggio.

- Fig. 4 -



Calcoliamo il raggio di (W_1) nell'ipotesi che (O_1), (O_2) siano secanti (Fig. 4). Detti H_1, K la proiezione di W_1 su AB e l'intersezione tra AB e CD, per il teorema di Pitagora

$$(W_1O_1)^2-(O_1H_1)^2=(W_1O)^2-(OH_1)^2$$

e quindi, indicati con a, b, r, p, u, v i raggi di (O_1), (O_2), (O), (W_1) e le lunghezze di O_1K, O_2K abbiamo:

$$(a+p)^2-(u-p)^2=(r-p)^2-(a+u-p-r)^2 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{(r-a)(a+u)}{2r} \tag{2}$$

Detti E, F i punti comuni ad (O_1), (O_2) per il teorema di Pitagora

$$(O_1E)^2-(O_1K)^2=(O_2E)^2-(O_2K)^2 \quad \Rightarrow \quad a^2-u^2=b^2-v^2 \tag{3}$$

Da (4) e (5) , tenuto conto che $u+v=2r-a-b$, otteniamo :

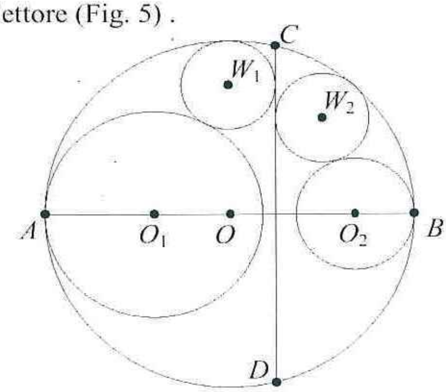
$$p=\frac{(r-a)(r-b)}{2r-a-b}=\frac{OO_1\times OO_2}{O_1O_2} \tag{4}$$

Osserviamo che la (4) generalizza la (1) [infatti se (O_1), (O_2) sono tangenti allora $r = a + b$] e consente la seguente costruzione di (W_1) mediante CABRI:

1) segmento AB di lunghezza $2r$
2) punto medio di AB [punto O]
3) circonferenza di centro O passante per A
4) punto su segmento AB [punto O_1 con $AO_1 = a < r$]
5) punto su segmento AB [punto O_2 con $BO_2 = b < r$ ed $a + b > r$]
6) circonferenza di centro O_1 passante per A
7) circonferenza di centro O_2 passante per B
8) intersezione di (O_1) ed (O_2) [punti E, F]
9) retta per due punti [retta EF]
10) semiretta [semiretta O_1E]
11) simmetria centrale (di O rispetto a O_2) [punto U]
12) circonferenza di centro O_1 passante per O [circonferenza g]
13) intersezione tra g ed O_1E [punto V]
14) retta O_2V
15) retta per U parallela ad O_2V [retta s]
16) intersezione tra s ed O_1E [punto W]
17) compasso (di raggio VW e centro E) [circonferenza h]
18) intersezione tra h ed O_1E [punti X, Y con $O_1X > O_1E$]
19) circonferenza di centro O_1 passante per X [circonferenza k]
20) intersezione tra AB ed EF [punto K]
21) compasso (di raggio VW e centro K) [circonferenza l]
22) intersezione tra l ed AK [punto H_1]
23) retta per H_1 perpendicolare ad AB [retta t]
24) intersezione tra k e t [punto W_1]
25) compasso (di raggio VW e centro W_1)

La (4) è valida anche se (O_1) ed (O_2) sono uno esterno all'altro ($a + b < r$) purchè, come già detto, CD sia il loro asse radicale.
La dimostrazione è lasciata al lettore (Fig. 5) .

- Fig. 5 -



3. Luoghi geometrici

Si è già accennato, nella parte introduttiva, alla caratteristica più importante del CABRI, che consiste nella possibilità di variare con continuità la forma di una figura in modo, però, che si conservino tutte le proprietà utilizzate per costruirla. Strettamente collegata a questa possibilità è, poi, quella di ottenere sullo schermo il luogo descritto da un punto P corrispondente, secondo una legge prefissata, di un altro punto Q che percorra una data linea (retta, circonferenza o loro parti) alla quale sia stato preventivamente vincolato. Osservando il luogo, si possono formulare *congetture* sulla sua natura. Ciò orienta efficacemente su come affrontare la dimostrazione ed indirizzare i tentativi. Chiariamo il tutto con gli esempi che seguono.

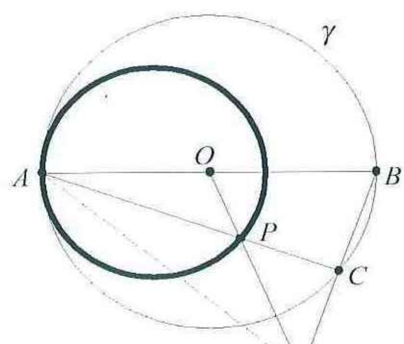
3.1. Problema D

In un cerchio γ di centro O e raggio r è dato un diametro AB. Sul prolungamento di una corda BC si prenda $CD = BC$. Determinare il luogo del punto di intersezione P di OD con AC, al variare di C su γ.
Mediante CABRI disegnamo una circonferenza γ di diametro AB e, con il comando "punto su oggetto", prendiamo su di essa il punto C. Costruiamo il simmetrico D di B rispetto a C, tracciamo i segmenti AC ed OD (dove O = centro di γ) e determiniamone il punto di intesezione P. Infine, utilizzando il comando "luogo di punti", tracciamo il luogo descritto da P. CABRI disegna una linea che, almeno per quello che si può giudicare visivamente, sembra essere una circonferenza tangente a γ in A. L'esattezza di tale ipotesi può essere dimostrata ragionando nel modo seguente: C è il punto medio di BD, O è il punto medio di AB, quindi P è il baricentro del triangolo ABD e, di conseguenza:

$$\frac{AP}{AC}=\frac{2}{3}$$

Il luogo di P è il cerchio omotetico di quello dato nell'omotetia di centro A e rapporto 2/3.

- Fig. 6 -

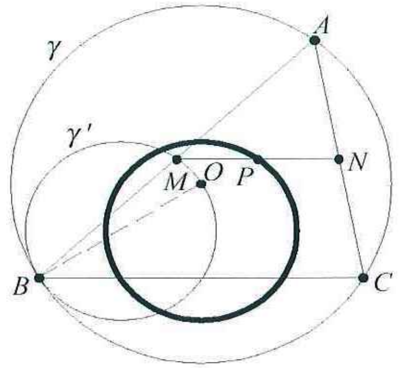


3.2. Problema E

Dato un triangolo ABC siano M ed N, rispettivamente, i punti medi dei lati AB, AC. Determinare il luogo descritto dal punto medio P di MN al variare di A sul circoncerchio γ di ABC.

Se facciamo descrivere il luogo di P da il CABRI otteniamo la figura 7 da cui si evince che il luogo stesso è una circonferenza. La dimostrazione può essere svolta così: il luogo di M è il cerchio γ' di diametro OB (dove O = circocentro) [1, pag 30]. Inoltre MP rimane costante in direzione e lunghezza (la direzione è quella di BC, la lunghezza è $\frac{1}{4}BC$). Pertanto, il luogo di P è il cerchio corrispondente a γ' nella traslazione determinata dal vettore $\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

- Fig. 7 -



BIBLIOGRAFIA

[1] I. D'IGNAZIO, E. SUPPA, *Il problema geometrico, dal compasso al cabri*, Interlinea Ed., Teramo, 2001

[2] ENRIQUES, AMALDI, *Elementi di geometria*, Zanichelli, Bologna, 1959

[3] A. SABBATINI, *Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici*, in: Questioni riguardanti le matematiche elementari. Raccolte e coordinate da F. Enriques, parte seconda e terza, Zanichelli, Bologna, 1987

[4] G. INDOVINA, *Gli strumenti classici della Geometria ed il Cabri-Géomètre*, Palermo, 1999

[5] L. BANKOFF, *The marvelous arbelos. The lighter side of mathematics*, Proceedings of Eugene Strens memorial conference on recreational mathematics and is history, R.K. Guy & R.E. Woodrow Ed., MAA, 1994

[6] P. BOIERI, *Da Cabri 1.7 a Cabri II*, Bollettino Cabrirrsae n. 12, Bologna, 1997

La congettura di Goldbach ovvero l'ingannevole apparenza della semplicità

Aldo Scimone*

E il naufragar m'è dolce in questo mare.
G. Leopardi, *L'Infinito*.

Alcuni anni fa venne pubblicato un breve romanzo intitolato *Zio Petros e la Congettura di Goldbach*, scritto da Apostol Doxiadis, un matematico greco che all'età di quindici anni venne ammesso alla Columbia University di New York, completando poi gli studi di matematica applicata a Parigi. Doxiadis, oltre che alla matematica, si è dedicato anche alla regia teatrale e cinematografica, pubblicando saggi, racconti e romanzi.

Protagonista del romanzo è lo zio Petros, la cui vicenda viene narrata dal nipote prediletto che, attraverso la comune passione per la matematica, riuscirà a scoprire il mistero e la storia della rinuncia da parte dello zio ad una vita sociale normale e perfino all'amore. All'inizio il nipote non sa spiegarsi perché i fratelli dello zio, uno dei quali è suo padre, disprezzino aspramente il fratello, considerato addirittura come la pecora nera della famiglia. Ma non appena riesce a scoprire, per un caso fortuito, la causa della poca considerazione in cui lo zio è tenuto dai suoi familiari, non può fare a meno di mettersi dalla sua parte, perché scopre che la vita dello zio, che agli occhi degli altri si compendia in un completo fallimento, è stata segnata da una passione tenace, estrema, assoluta, che non gli ha dato certamente la gloria matematica, ma che ne ha sublimato l'esistenza nella ricerca affannosa della verità, che per lui è stata rappresentata dalla dimostrazione della congettura di Goldbach.

Il romanzo di Doxiadis possiede, tra gli altri, il non comune merito di avere portato alla ribalta il nome di Goldbach e l'interesse intor-

* GRIM (Gruppo di Ricerca per l'Insegnamento delle Matematiche) – Dipartimento di Matematica dell'Università di Palermo, via Archirafi, 34 – 90123 Palermo.

no alla sua congettura, per cui, dato che essa è oggi oggetto di intensi studi, mi sembra opportuno delinearne la storia perché, come sempre accade, i tentativi di dimostrarla, dal diciassettesimo secolo a oggi, hanno prodotto una grande messe di matematica interessante.

Christian Goldbach (1690-1764) nacque a Königsberg e visse a Berlino con il titolo di consigliere aulico fino al 1725, anno in cui si trasferì a S. Pietroburgo. Pur essendo d'indole schiva e modesta, la sua cultura e i lavori prodotti (ebbe vasti interessi scientifici, ma fu particolarmente attratto dalla Teoria dei numeri e dall'Analisi matematica) gli permisero di diventare segretario dell'*Accademia delle Scienze* di San Pietroburgo, e nel 1742 fu anche incaricato dal Ministero degli Affari Esteri di decifrare dispacci. Fu in corrispondenza con Eulero dal 1729 fino all'anno della propria morte.

La congettura di Goldbach appartiene ormai all'immaginario collettivo dei grandi problemi irrisolti della matematica, come la celebre congettura di Bernhard Riemann (1826-1866) sulla funzione *zeta*, o come quella sull'infinità o meno dei cosiddetti numeri *primi gemelli* (cioé numeri primi che differiscano di 2, come 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13), o quella sull'infinità dei cosiddetti *numeri perfetti*. La sua dimostrazione sarebbe estremamente importante perché essa è collegata ad altri problemi aperti della teoria dei numeri, come, per esempio, la cosiddetta congettura *forte* sui numeri primi gemelli.

Essa ha un enunciato semplicissimo, che può essere compreso anche da un fanciullo, ma, come accade spesso in teoria dei numeri, proprio tale semplicità può trarre in inganno, perché non è affatto vero che la dimostrazione di una congettura è tanto più facile quanto più semplice è il modo in cui essa viene enunciata. La sua formulazione generale è:

Ogni numero pari maggiore di 2 può essere rappresentato mediante la somma di due primi.

La congettura è stata verificata per numeri pari dell'ordine di 108, ma per i matematici questa è solo una semplice evidenza sperimentale, perché l'unica cosa che potrebbe soddisfare il loro spirito è soltanto una dimostrazione.

Per esempio, appena poche verifiche sono sufficienti per rendersi conto che la scelta della coppia di primi in cui spezzare un assegnato numero pari non è in generale unica:

6 = 3 + 3	senza alcuna alternativa
8 = 3 + 5	" "
10 = 3 + 7	ma anche: 10 = 5 + 5
12 = 5 + 7	senza alcuna alternativa
14 = 3 + 11	ma anche: 14 = 7 + 7
16 = 3 + 13	ma anche: 16 = 5 + 11
18 = 5 + 13	ma anche: 18 = 7 + 11
20 = 3 + 17	ma anche: 20 = 7 + 13.

E non basta. Anche considerando dei pari abbastanza piccoli, si può giungere a tre coppie di primi:

22 = 3 + 19	ma anche: 22 = 5 + 17	ed anche: 22 = 11 + 11
24 = 5 + 19	ma anche: 24 = 7 + 17	ed anche: 24 = 11 + 13
26 = 3 + 23	ma anche: 26 = 7 + 19	ed anche: 26 = 13 + 13.

Considerando poi dei pari appena un po' più grandi, le possibilità di scelta sembrano aumentare. Perché? Secondo quale legge? C'è una qualche regolarità in tutto ciò?

È ipotizzabile che Goldbach, nei suoi innumerevoli tentativi di dimostrazione, lavorasse su tabelle del tipo seguente:

n	***3+...***	***5+...***	***7+...***	***11+...***	***13+...***	***17+...***	***19+...***	***23+...***
6	3+3							
8	3+5	5+3						
10	3+7	5+5	7+3					
12		5+7	7+5					
14	3+11		7+7	11+3				
16	3+13	5+11		11+5	13+3			
18		5+13	7+11	11+7	13+5			
20	3+17		7+13		13+7	17+3		
22	3+19	5+17		11+11		17+5	19+3	
24		5+19	7+17	11+13	13+11	17+7	19+5	
26	3+23		7+19		13+13		19+7	23+3
28		5+23		11+17		17+11		23+5
30			7+23	11+19	13+17	17+13	19+11	23+7
32	3+29				13+19		19+13	

....

Cosa può aver pensato Goldbach? Che nella tabella precedente ogni riga deve essere occupata da almeno una somma dei primi. E quindi il problema era ricondotto a capire come si presentano i numeri primi nella successione degli interi dispari; cioè, nel vincere la loro disposizione incredibile ed affascinante, così folle, così inspiegabilmente irregolare.

Certo, si sarà detto Goldbach, non sarebbe difficile dimostrare la congettura se almeno si conoscessero i ritmi delle interruzioni che spezzano la distesa dei numeri primi. Chissà se il grande amico Eulero avrebbe voluto dedicare un po' del suo tempo a questo semplice esercizio.

Fu allora che Goldbach (da Mosca) scrisse a Eulero (a Berlino) la lettera del 7 giugno 1742[76]:

Io non credo inutile prestare attenzione anche a quelle proposizioni che sembrano vere malgrado non se ne abbia una vera dimostrazione. Anche se dopo si dimostrassero false, avrebbero tuttavia dato luogo alla scoperta di una nuova verità. L'idea di Fermat che ogni numero 22n-1+1 dà una successione di numeri primi non può essere corretta, come lei ha mostrato, ma sarebbe notevole se questa serie desse i soli numeri che possono scomporsi in due quadrati in un solo modo. Similmente, anch'io azzarderò una congettura: *che ogni numero composto di due primi è un aggregato di quanti si vogliano numeri (compresa l'unità), finché si raggiunga la combinazione di tutte le [sue] unità* [77] (corsivo mio).

Goldbach aggiunse a margine:

Dopo aver riletto quanto scritto, trovo che la congettura può essere dimostrata con tutto rigore nel caso $n+1$, se è vera nel caso n e se $n+1$ può scomporsi in due primi. La dimostrazione è molto semplice. Sembra ad ogni modo che ogni numero maggiore di 2 sia un aggregato di tre numeri primi[78].

76 Cfr. D.J. Struik, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1969, pp. 47-48.

77 Cioè: ogni numero n che sia somma di due primi è somma di quanti si vogliano primi fino ad n. Ricordiamo che per Eulero e Goldbach 1 è un primo, mentre oggi non lo si considera tale perché, come è noto, verrebbe meno il teorema della fattorizzazione unica.

78 È questa la prima formulazione della congettura di Goldbach. Per la storia della congettura è ancora utile L.E. Dickson, *History of the theory of numbers*, cit., I, pp. 421-24, e R.C. Archibald, Goldbach's theorem, *Scripta Mathematica*, 3 (1935), pp. 44-50 e 153-161.

Il testo della lettera di Goldbach continua:

Per esempio:

$$4=\begin{cases}1+3\\1+1+2\\1+1+1+1\end{cases}\quad 5=\begin{cases}2+3\\1+1+3\\1+1+1+2\\1+1+1+1+1\end{cases}\quad 6=\begin{cases}1+5\\1+2+3\\1+1+1+3\\1+1+1+1+2\\1+1+1+1+1+1\end{cases}$$

Non meno interessante è la risposta di Eulero (da Berlino) a Goldbach: del 30 giugno 1742:

Quando tutti i numeri inclusi nell'espressione $2^{2^{n-1}}+1$ possono scomporsi in due quadrati in un solo modo, questi numeri devono anche essere tutti primi, ciò che non è il caso, perché tutti questi numeri sono contenuti nella forma 4m+1 che, ogni qual volta è primo può certamente risolversi in due quadrati in un sol modo, ma quando 4m+1 non è primo, o non è risolvibile in due quadrati oppure lo è in più modi. Che 232 +1, che non è primo, può dividersi in due quadrati in almeno due modi lo posso mostrare nel seguente modo: I. Quando *a* e *b* sono risolvibili in due quadrati, allora anche il prodotto *ab* sarà risolvibile in due quadrati. II. Se il prodotto *ab* e uno dei fattori *a* fossero risolvibili in due quadrati, allora anche l'altro fattore *b* dovrebbe essere risolvibile in due quadrati. Questi teoremi si possono dimostrare rigorosamente. Ora 232 +1, che è divisibile in due quadrati, precisamente 232 e 1, è divisibile per 641 = 252 + 42. Quindi l'altro fattore, che per brevità chiamerò *b*, deve essere anch'esso somma di due quadrati. Posto $b = pp + qq$, sicché 232 +1 = (252 + 42) $(pp+qq)$, allora

$$2^{32}+1=(25p+4q)^2+(25q-4p)^2$$

e contemporaneamente

$$2^{32}+1=(25p-4q)^2+(25q+4p)^2$$

quindi 232+1 è divisibile in almeno due modi nella somma di due quadrati. Dal momento che $p = 2556$ e $q = 409$, la duplice riduzione può trovarsi a priori:

$$2^{32}+1=65536^2+1^2=622664^2+20449^2.$$

Che ogni numero che sia risolvibile in due primi può risolversi in quanti si vogliano primi, può essere illustrato e confermato da un'osservazione che lei mi aveva comunicato qualche tempo fa, cioè che ogni numero pari è una somma di due primi. Infatti, il numero dato n sia pari; allora è somma di due primi e dal momento che n-2 è anch'esso somma di due primi, n deve essere somma di tre e anche di quattro primi e così via. Se, tuttavia, n è dispari, allora è certamente somma di tre primi, dal momento che n-1 è somma di due primi, e perciò può anch'esso risolversi in quanti si vogliano primi. Tuttavia, che *ogni numero pari sia somma di due primi* (cors. mio) lo considero un teorema del tutto vero, sebbene io non sappia dimostrarlo.

Sembra che Eulero non abbia mai cercato di dimostrare la congettura di Goldbach, ma in una lettera del dicembre 1752 a lui indirizzata stabilì l'ulteriore congettura (anch'essa probabilmente suggerita da Goldbach) che ogni numero pari della forma 4n+2 è uguale alla somma di due primi della forma 4m+1. Per esempio: 14 = 1 + 13; 22 = 5 + 17; 30 = 1 + 29 = 13 + 17.

Indipendentemente da Goldbach, anche il matematico inglese Edward Waring (1734-1798), nell'opera *Meditationes analyticae* (Cambridge, 1776), aveva espresso la stessa congettura nella forma seguente:

Ogni numero pari consiste di due primi e ogni numero dispari o è primo o consiste di tre numeri primi.

Piuttosto però che impegnarsi in dubbie questioni di priorità è preferibile dire qualcosa sull'evidenza empirica a favore della congettura, pur in presenza di qualche voce dissonante[79].

Sorvolando su alcuni contributi minori, è significativo segnalare come George Cantor (1845-1918) abbia approntato una tabella molto interessante che verificava la congettura per i numeri pari fino a mille[80]. Se $n = 2N = x + y$, con x e y primi e $x \leq y$, e denotando con (n) il

79 Cfr. F.J.E. Lionnet, Note sur la question "Tout nombre pair est-il la somme de deux impairs premiers?, *Nouvelles Annales des Mathématiques*, t. 18 (2), 1879, pp. 356-360.

80 Cfr. G. Cantor, Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach, Association française pour l'avancement des sciences, *Comptes Rendus de la XXIII session*, Caen (1894), pp. 117-134.

numero delle possibili scomposizioni di n, alcuni valori della tabella di Cantor sono i seguenti:

n=2N	x	(n)
10	3,5	2
22	3,5,11	3
34	3,5,11,17	4
40	3,11,17	3
78	5,7,11,17,19,31,37	7
86	3,7,13,19,43	5
100	3,11,17,29,41,47	6
1000	3,17,23,29,47,53,59,71,89, 113,137, 173,179, 191,227,239,257,281,317, 347,353,359,383,401,431,443,479,491	28

La tabella cantoriana per n=990 fornisce il più grande numero di scomposizioni, cioè (990) = 52 e ciò sembra indicare che la congettura di Goldbach non solo è probabilmente vera, ma che i valori di (n) crescono al crescere di n, sebbene con le tipiche oscillazioni delle funzioni aritmetiche.

Successivamente Haussner estese la tabella cantoriana a tutti i numeri pari fino a 10.000, dividendoli in gruppi (fino a 3000, fino 5000, etc.), concludendo che la congettura era verificata[81].

Il concetto informativo di queste tabelle dirette sembra essere il seguente: considerato il numero n = 2N, sottraendo da esso tutti i primi $x \leq$ N, si vada a cercare nelle Tavole dei primi quali delle differenze 2N $- x$ siano anche numeri primi. Quando 2N $- x$ risulta primo, allora 2N sarà rappresentabile come somma di due primi

Douglas R. Hofstadter si è ispirato[82] alla congettura di Goldbach per imbastire un dialogo delizioso tra Achille e la Tartaruga che sono

81 Cfr. Archibald, op. cit., p. 49.

82 Douglas R. Hofstadter, "Variazioni Goldbach", in *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, Milano, Adelphi, 1990, pp. 424-438.

due protagonisti del suo classico libro *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*.

Il dialogo si trova nel Cap. XII (Parte II) del libro, e ha come protagonisti Achille e la Tartaruga. La forma del dialogo è basata sulle *Variazioni Goldberg* e il contenuto riguarda problemi di teoria dei numeri come la congettura di Goldbach e quella di Collatz. In sintesi, Hofstadter vuole mostrare come sul tema della ricerca che si effettua in teoria dei numeri, proprio perché il suo campo di indagine è l'insieme infinito dei numeri naturali, possano esservi molte variazioni, alcune delle quali conducono a indagini finite, altre a indagini infinite e altre ancora a indagini che oscillano fra quelle finite e quelle infinite. Così, la congettura di Goldbach conduce a una indagine finita, nel senso che se si vuole verificare se un numero pari $2n$ è somma di due primi dispari, la procedura per effettuare tale verifica avrà *certamente termine*, perché i primi si devono cercare nell'insieme finito dei numeri primi minori di $2n$.

Consideriamo, invece, quella che Hofstadter chiama, sempre per i numeri pari, la *proprietà della Tartaruga*, cioè il fatto che un numero pari si possa esprimere come differenza di due primi dispari:

$$
\begin{aligned}
2 &= 5 - 3 = 7 - 5 = 13 - 11 = 19 - 17 = \dots \\
4 &= 7 - 3 = 11 - 7 = 17 - 13 = 23 - 19 = .. \\
6 &= 11 - 5 = 13 - 7 = 17 - 11 = 19 - 13 = \dots \\
8 &= 11 - 3 = 13 - 5 = 19 - 11 = 31 - 23 = \dots
\end{aligned}
$$

Ebbene, se vogliamo verificare, dato un numero pari $2n$, se esso possieda o no tale proprietà, in linea di principio la procedura da adottare è *potenzialmente infinita*, in quanto bisogna estendere la ricerca a tutto l'insieme infinito dei numeri primi.

Se un numero pari non avesse la proprietà della tartaruga, avrebbe -dice Hofstadter- la *proprietà di Achille*, cioè quella di non essere esprimibile come differenza di due primi dispari.

C'è, poi, un terzo tipo di indagini che potrebbero essere finite o infinite, come quella relativa al problema $3x+1$ di Collatz. Infatti, dato un qualsiasi numero x, applicando ad esso la regola secondo cui se è dispari lo triplichiamo e vi aggiungiamo uno, mentre se è pari ne prendiamo la metà, è molto difficile sapere in anticipo quanto si dovrà "salire in alto" prima di giungere alla successione finale 4-2-1. Così, per esempio, se partiamo da x=15, e applichiamo la procedura, il massimo numero a cui si "salirà" sarà 160:

15-46-23-70-35-106-53-*160*-80-40-20-10-5-16-8-4-2-1

ma è del tutto plausibile pensare che con altri numeri si possa salire sempre più in alto e non scendere mai.

Per quanto riguarda le variazioni Goldberg, Hofstadter si riferisce alle 30 variazioni scritte da Johan Sebastian Bach (1685-1750) per il conte sassone Kaiserling, eseguite da un giovane clavicembalista di corte di nome Goldberg, al quale vennero attribuite, perché il conte voleva che gli venissero suonate ogni sera, dato che soffriva d'insonnia.

Dall'epoca della sua pubblicazione, tutti i matematici si sono trovati d'accordo nel ritenere la congettura di Goldbach uno dei problemi matematici più difficili.

A questo proposito, vi è un aneddoto secondo il quale il matematico Harry Schultz Vandiver (1882-1973) andava dicendo che se dopo la morte fosse tornato in vita e fosse venuto a sapere che il problema di Goldbach era stato risolto, allora sarebbe morto nuovamente di colpo. Nel 1930, il matematico russo Lev Genrikhovich Shnirelman (1905-1938) dimostrò che esiste un intero positivo c tale che ogni intero positivo è la somma al più di c primi. Sette anni dopo, Ivan Matveevich Vinogradov (1891-1983) dimostrò che da un certo punto in poi ogni numero dispari è la somma di tre primi dispari.

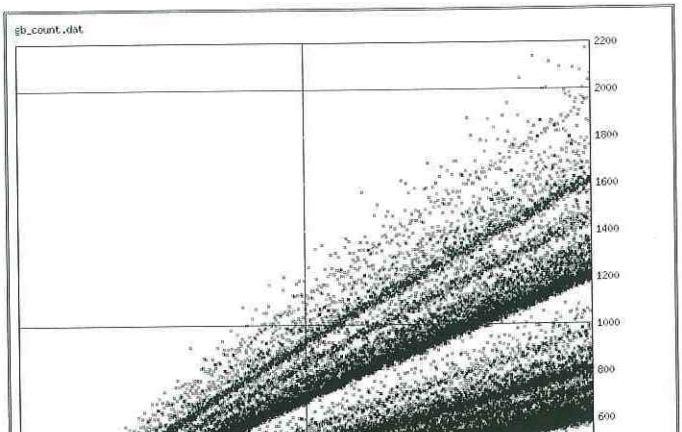
I due matematici inglesi Godfrey Harold Hardy (1877-1947) e John Edensor Littlewood (1885-1977) fornirono una formula per determinare il numero di tali rappresentazioni, supposto che ne esista una.

Nel 1966, Chen Jing-run dimostrò che ogni numero pari maggiore di 2 è della forma $p+a$, con p primo ed a primo o il prodotto di due primi. Recentemente, nel 1997, Jean-Marc Deshouillers, Yannik Saouter e Hermann J.J. te Riele hanno dimostrato che la congettura è vera per tutti gli interi positivi minori di 1014.

Una raffigurazione suggestiva della congettura di Goldbach può essere ottenuta con un diagramma cartesiano, rappresentando sull'asse delle ascisse i numeri pari e su quello delle ordinate il numero delle somme dei due numeri primi in cui si può scomporre un numero pari.

Una tale rappresentazione, elaborata al computer, per numeri pari compresi tra 4 e 100000, assume una forma di cometa[83] molto bella, tanto da essere stata chiamata romanticamente "la cometa di Goldbach".

Prima di chiudere questa breve rassegna sulla storia di questa famosa congettura, desidero ricordare che recentemente essa è stata oggetto di alcune generalizzazioni dovute al matematico di origine rumena Florentin Smarandache che ha preso in considerazione le rappresentazioni di numeri pari e dispari come somme di primi. Da ciò che è stato detto riguardo ai tentativi di dimostrare la congettura, è chiaro che la strada da intraprendere non è ovviamente quella di una verifica empirica, ma piuttosto quella di una dimostrazione come nel caso dell'ultimo teorema di Fermat. Chi volesse intraprendere questa via, che sembra ormai a portata dei matematici, può contare sull'incentivo di un premio di un milione di dollari messo in palio dagli editori, inglese e americano, Faber & Faber e Bloomsbury, del fortunato romanzo di Apostolos Doxiadis. Ecco un modo per conquistarsi una fama imperitura!



La "cometa" di Goldbach

83 Cfr. Jean-Paul Delahaye, *Merveilleux nombres premiers. Voyage au cœur de l'arithmétique*, Paris, Belin, 2000, p. 156.

Bibliografia essenziale

1. Archibald R. G., *Goldbach's theorem*, Scripta Mathematica, 3 (1935), 44-50, 153-161.
2. Dickson L. E., *Goldbach's Theorem* in: History of the theory of numbers, Washington (1919), 421-424.
3. Hardy G. H., Wrigh E. M., An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford, Clarendon Press, 1975.
4. Nastasi P., Scimone A., Da Euclide a Goldbach. Storie di Uomini e Numeri, Sigma Edizioni, 2001.
5. Scimone A., *Following Goldbach's tracks*, Proceedings of the International Conference on The Humanistic Renaissance in Mathematics Education, September 20-25, 2002.
6. Scimone A., Conceptions of pupils about an open historical question: Goldbach's conjecture. The improvement of Mathematical Education from a historical viewpoint, Doctoral Thesis, Quaderni di Ricerca in Didattica della Matematica del G.R.I.M., n. 12, Palermo 2003.
7. Shanks D., Solved and Unsolved Problems in Number Theory, New York, 1978.