Ruolo del resveratrolo nella salute umana

L'EFFICACIA ANTICANCRO DEL VINO ROSSO

Da molti anni ormai, il resveratrolo è noto per interessanti benefici che apporta alla salute umana ed inoltre le sue funzioni si esprimono se assunto attraverso il vino e non estratto, in quanto il fitocomplesso che forma nel suo ambiente naturale è essenziale per modularne gli effetti. Le conoscenze relative al vino di proteggere dal cancro aumentano, in particolare per il tumore ai polmoni. Se ne sono occupati, fra gli altri, Mollerup e coll. (2001), e Kimura e Okuda (2000). Si è evidenziato che l'effetto favorevole è dovuto sia al resveratrolo sia alle molecole colorate del mosto e del vino rosso. In quanto al resveratrolo, esso agisce inibendo la proliferazione dei linfociti della milza e sembra anche attivo nei confronti delle cellule tumorali nel caso del cancro alla prostata. Jannin et coll (2001) hanno approfondito le conoscenze intese a verificare il ruolo del resveratrolo. Come ha riassunto Orlandi (2002), la ricerca ha utilizzato il residuo secco del vino, ovvero il resveratrolo ed i composti polifenolici in esso contenuti, ed il residuo del cognac. Resveratrolo e residui hanno bloccato talune attività metaboliche necessarie per lo sviluppo del tumore epatico, ma l'azione dei residui del vino è stata ben più efficace di quella dei componenti non volatili del cognac, del succo d'uva e del vino bianco. Inoltre, l'azione del residuo secco è stata nettamente superiore a quella del resveratrolo isolato; ne deriva l'ulteriore interesse per l'identificazione delle altre molecole non volatili del vino caratterizzate da attività anticancerogena ben evidenziate.

Uno studio sperimentale effettuato da Mollerup et al. nel 2001 ha rilevato il motivo per cui il *trans*-resveratrolo è efficace nella lotta contro il tumore. A quanto hanno appurato i ricercatori della facoltà di medicina. della University of North Carolina a Chapel Hill, il resveratrolo disattiva la proteina NF-kappa-B, che protegge le cellule cancerose dalla chemioterapia e dalla distruzione. Secondo Minnie Holmes-McNary, che ha diretto la ricerca, i risultati ottenuti indicano che il resveratrolo stesso potrà essere utilizzato, forse, un giorno per la prevenzione e/o la terapia anti-cancro. Utilizzando il resveratrolo negli esperimenti condotti su cellule umane e su cellule di topi sperimentali, gli scienziati hanno potuto riprodurre il processo che utilizza naturalmente l'organismo per uccidere le cellule cancerogene, come ha spiegato Holmes-McNary: tale processo è un meccanismo di difesa che induce una sorta di suicidio (apoptosi) delle cellule nocive. "Quando il resveratrolo era assente nella coltura di cellule- si legge su Cancer Research- le cellule cancerogene continuavano a riprodursi. Ma quando il resveratrolo è stato introdotto nel l'esperimento, abbiamo potuto attivare con successo la morte delle cellule cancerogene grazie alla disattivazione della proteina NF-Kappa-B".

L'efficacia anti-cancro del vino rosso era stata già accertata da alcuni anni, ed una ricerca svolta due anni fa dalla University of Illinois aveva appurato l'efficacia anti-cancerosa ed anti-infiammatoria del resveratrolo.

Il resveratrolo è un potente antiossidante, infatti studi condotti da Fan e Mattheis dimostrarono che il *trans*-resveratrolo inibisce la dismutasi superossidasi, la lipossigenasi, la catalasi, la perossidasi, la polifenolossidasi. Inoltre risultò che l'attività lipossigenasica del resveratrolo era molto più rapida di altri inibitori, come ad esempio gallato propilene, ibuprofene, acido ursolico, acido acetilsalicinico e l'acido salicilidrossaminico.

Studi condotti da Acquaviva et al. nel 2002 misero in risalto che il resveratrolo oltre a questa capacità antiossidante, era in grado di proteggere il DNA dalla sua dissociazione. Il resveratrolo mostrò un'interessante capacità di bloccare i radicali liberi e metalli chelanti, di inibire l'attività della xantinaossidasi, di avere potere antilipossigenasi e di inibire la dissociazione del DNA.

Risulta chiaro, inoltre, che il resveratrolo presenta attività sulle malattie neurovegetative, la capacità di potenziare i processi di apprendimento (memoria), l'attività della mitogen-activated protein Kinasi (MAPK) che regolano la capacità di rigenerazione neurale.

In quanto fitoestrogeno, il resveratrolo è in grado di legarsi ai recettori per gli estrogeni.

Il resveratrolo inibisce la ciclossigenasi 2 (COX 2), implicata nei processi infiammatori e tumorali, è un antiaggregante piastrinico (effetto protettivo nella cardiopatia ischemico) e inibisce le molecole di adesione endoteliale ICAM-I (antracellular adhesion molecule 1) e VCAM-1 (vascular adhesion molecule 1) che promuovono il legame di monociti e linfociti all'endotelio e sono coinvolti nella genesi del processo arteriosclerotico.

Il resveratrolo cattura il rame a livello del colesterolo LDL, impedendone l'ossigenazione ed effetti dannosi.

Livelli di questa sostanza assorbiti dall'assunzione di modeste quantità di bevande assicurano un tasso nel sangue farmacologicamente attivo: ciò è dovuto ad altri elementi che ne potenziano l'effetto e che sono presenti nel vino.

Secondo recenti studi, sembra che il consumo di vino, anche privato della sua componente alcolica, ha la capacità di influire positivamente su alcuni fattori dell'emostasi (il processo che normalmente arresta il sanguinamento e, in condizioni patologiche, provoca la trombosi). In questo modo viene tolta la possibilità che il sangue formi questi particolari coaguli (trombi) che possono ostruire le arterie dando origine all'infarto. E' da notare che questo effetto non viene registrato quando viene usato solo alcol ed in misura minore quando viene usato il bianco. I ricercatori hanno effettuato studi su ratti, dividendoli in cinque gruppi. Il primo gruppo ha ricevuto, oltre ad una normale dieta, un quantitativo giornaliero di vino rosso (Montepulciano). Praticamente identica la dieta seguita dal secondo gruppo, solo che il vino era stato privato di alcol. I ratti del terzo gruppo ricevettero vino bianco, mentre i ratti del quarto gruppo ricevettero solo alcol, nelle concentrazioni uguali a quelle che erano contenute nei vini bevuti dagli altri. Infine il quinto gruppo ha ricevuto una dieta senza aggiunta dì sostanze. I risultati sono stati particolarmente favorevoli per quelli che hanno ricevuto una dieta con aggiunta di vino rosso, infatti si è avuta una netta diminuzione di formazione di trombi all'intemo delle arterie, un effetto protettivo che si è mantenuto identico sia per il vino normale che per quello senza alcol. Questi studi rafforzano l'ipotesi che nel vino rosso ci siano alcune sostanze chimiche, diverse dall'alcol, capaci di un effetto benefico nei confronti delle malattie cardiovascolari. Le analisi sui vini rossi usati durante questa ricerca, dimostrano un'elevata concentrazione di composti con potere antiossidante, soprattutto resveratrolo. Parallelamente è stato osservato che, negli animali trattati con vino rosso, si hanno notevoli modifiche nel meccanismo dell'emostasi, modificazioni che rendono più difficile la formazione di trombi all'interno dell'arteria. Questi fenomeni appaiono tutti legati ad una maggiore produzione di ossido nitrico nel sangue. E' il caso di ricordare che questa molecola sta assumendo sempre maggiore importanza nel campo della medicina cardiovascolare. Precedenti esperienze avevano già mostrato un forte effetto degli antiossidanti contenuti nel vino nei confronti dell'emostasi, in particolare attraverso un'azione sulla produzione di ossido nitrico. E' però la prima volta che si osserva questo fenomeno in organismi viventi, nei quali si ottiene un reale effetto protettivo nei confronti della trombosi .

Anche lo pterostilbene, come il resveratrolo, ha mostrato poteri antiossidanti. Secondo gli studi condotti da Rimando et al. pubblicati nel 2002, lo pterostilbeni ha mostrato avere medio potere inibente verso cicloossigenasi (COX-1) e debole verso COX-2. Effettuando degli esperimenti su dei topi a cui era stato indotto un tumore, le lesioni preneoplastiche causate dalla malattie sembrarono diminuire grazie all'intervento del pterostilbene (ED50= 4.8 microM), suggerendo che l'attività antiossidante gioca un ruolo importante anche in questo processo.

Ritornando al resveratrolo, in una ricerca di Heredia et al. (2000), è stato riscontrato che aumenta sinergicamente l'attività anti-HIV-1 degli analoghi nucleosidi zidovudina (AZT), zalcitabina (ddc) e didanosina (ddl). Il resveratrolo a 10 micro M non è risultato essere tossico verso le cellule e da solo ha ridotto la replicazione virale del 20-30%. L'aggiunta di resveratrolo ha provocato un incremento superiore a 10 volte dell'attività antivirale del ddI nei macrofagi derivati dai monociti (MDM) infetti (ovvero nelle cellule che rappresentano una riserva a lungo tempo di virus HIV-l). In un modello di cellule a riposo di linfociti T infettati con HTLV-IIIB, la combinazione resveratrolo più ddl (ma non individualmente) ha soppresso l'istituzione di un'infezione virale produttiva. Per concludere il resveratrolo ha mostrato un minore effetto antiproliferativo sulle cellule del'HU. Gli autori sottolineano che i risultati di questo studio suggeriscono che combinazione ddl+resveratrolo potrebbe presentare un profilo tossicologico migliore.

Come ha riassunto F. Orlandi, ben noto gastroenterologo dell'Università di Ancona, in un articolo sul Corriere Vinicolo di novembre 2001, una ricerca epidemiologica di altissimo significato è stata condotta su 21 mila medici astemi o bevitori nordamericani; in 12 anni tra di loro si sono sviluppati 766 casi di diabete tipo 2, quello in cui si mantiene una parziale funzionalità pancreatica e che si manifesta nella fase più avanzata della vita umana. Il rischio è stato simile per gli astemi e per i bevitori "occasionali", vale a dire i soggetti che non consumano bevande alcoliche più di tre volte in un mese. Tale rischio cominciava già a diminuire per i soggetti con un consumo di due volte alla settimana, per dimezzare con il ricorso abituale di tre volte al giorno. L'insieme dei dati raccolti in una seconda indagine intesa a verificare, sempre nel diabetico, l'incidenza delle coronariopatie letali, ha mostrato nel bevitore moderato una più bassa mortalità rispetto a quanto osservato per gli astemi, quanto per i forti bevitori. Le due indagini non hanno ancora fornito dati specifici sul vino, il quale, però, secondo Orlandi, ha certamente diversi punti di vantaggio potenziale sulle altre bevande alcoliche.

Un'interessante notizia è emersa nella Conferenza Internazionale su agenti antimicrobici a Toronto. Il resveratrolo sembra anche essere capace di combattere il virus dell'herpes, sia il simplex 1 ("febbre" alle labbra) sia il simplex 2 (quello ai genitali, molto più aggressivo e pericoloso per i nascituri se le madri ne soffrono al momento del parto). Secondo i ricercatori di Northereastem Ohio Universities College of Medicina di Rootstowm, il resveratrolo condiziona la sintesi di due proteine che partecipano alla sintesi del virus e quindi potrebbe essere in futuro usato per inibire i sintomi della malattia.

Il resveratrolo non sembra avere soltanto interessanti funzioni mediche, ma uno studio pubblicato recentemente dai ricercatori Urefia-Gonzalez et al. (2003), ha evidenziato come il *trans*-resveratrolo potesse uccidere funghi che si depositano sulla frutta. I ricercatori hanno quindi pensato che il composto possa essere usato per combattere i funghi che attaccano la frutta colta e messa sul mercato. Immergendo mele e uva nel *trans*-resveratrolo in quantità bassissime, la cosiddetta "vita sullo scaffale" è stata allungata moltissimo: il 90% delle mele sembravano perfette anche dopo 60 giorni, mentre quelle non trattate erano già invendibili dopo due settimane.

Vitarosa Taranto

Gruppi, Trasformazioni, Simmetrie

Un percorso dall'algebra astratta alla fisica

(parte seconda)

2. TRASFORMAZIONI

2.1 GRUPPI E TRASFORMAZIONI

Prima di proseguire, occorre che sia ben chiaro che i termini **gruppo** e **insieme** non hanno lo stesso significato. Si può non ricordare con esattezza la definizione tecnica del termine gruppo, ma si deve almeno tenere presente che nel linguaggio comune si usa la parola gruppo per indicare un insieme in cui sussistono delle precise relazioni fra i suoi elementi. In ambito matematico tali relazioni sono, come abbiamo visto, ben definite (si può eseguire un'operazione fra i suoi elementi e tale operazione deve godere di precise proprietà). Esistono molti insiemi, i cui oggetti sono completamente differenti, che rivelano un'analogia strutturale. Per completezza, è opportuno aggiungere che non tutti gli insiemi strutturalmente simili sono gruppi, poiché esistono altre strutture "astratte" caratterizzate da differenti relazioni (strutture algebriche, d'ordine o topologiche). In ogni caso, vale quanto afferma **Henri Poincarè**: *"I matematici non studiano gli oggetti, ma le relazioni fra gli oggetti: pertanto è indifferente per loro sostituire questi oggetti con altri, purchè non cambino le relazioni"*.

In che senso "indifferente"? In parole povere, i matematici sono riusciti a dimostrare delle proprietà che valgono per una struttura di un certo tipo: in questo modo ogni volta che si presenta un insieme che soddisfa le relazioni di una certa struttura conosciuta, si può disporre di un arsenale di teoremi generali, validi per quel determinato tipo di struttura, che si possono applicare in ogni caso particolare (su oggetti diversi).

Un'ulteriore puntualizzazione: al concetto di **sottoinsieme** corrisponde il concetto di **sottogruppo**. Se un insieme è un gruppo, un suo sottoinsieme si potrà chiamare sottogruppo solo se mantiene la struttura di gruppo (ovvero se è a sua volta un gruppo rispetto all'operazione definita nell'insieme di partenza).

Consideriamo ora il termine **trasformazione**: nel linguaggio naturale ha un significato abbastanza generico, sinonimo di cambiamento. In geometria il termine viene introdotto e utilizzato con un significato ben preciso: una trasformazione è una corrispondenza biunivoca tra punti dello spazio (associa ad ogni punto P uno ed un solo punto P', detto *immagine* o *trasformato* del punto P, ed è tale che punti distinti hanno immagini distinte). Se i punti appartengono allo stesso piano si parla di una trasformazione **del piano in sè**. Una trasformazione del piano in sé si può applicare consecutivamente ad un'altra: chiamiamo quest'operazione *composizione* di trasformazioni. Chiamiamo inoltre trasformazione identica o *identità* la trasformazione che manda ogni punto del piano in se stesso e trasformazione *inversa* della trasformazione che manda P in P' la trasformazione che manda il punto Q=P' in Q'=P. A questo punto è facile constatare che ***l'insieme T delle trasformazioni del piano in sè costituisce un gruppo rispetto alla composizione di trasformazioni***. Abbiamo quindi individuato un insieme, i cui oggetti sono le trasformazioni del piano in sé, che è dotato della struttura di gruppo. Ci interessano ora i possibili sottogruppi di tale gruppo T.

2.2 FELIX KLEIN E LA CLASSIFICAZIONE DELLE "GEOMETRIE"

Consideriamo una figura geometrica F, ovvero un insieme di punti del piano. Assegnata una trasformazione del piano in sé è possibile considerare i trasformati dei punti di F: si ottiene un'altra figura F', detta *trasformata* di F. Fra le due figure ci può essere una relazione. Potrebbero essere addirittura identiche: diversamente potrebbero avere la stessa forma oppure, nel caso particolare di una figura poligonale, potrebbe conservarsi il numero dei vertici. In ogni caso si possono studiare, assegnata una trasformazione, quali proprietà o caratteristiche di una figura *si conservano*, si mantengono *invariate*. Passando in rassegna tutte le possibili trasformazioni, si scoprirebbe che esistono dei sottogruppi del gruppo T che conservano determinate proprietà delle figure, **proprietà invarianti** per tutte le trasformazioni di quel sottogruppo.

Un inciso che ci può far comprendere come il legame fra geometria e gruppo di trasformazioni sia inconsciamente sfruttato. Alla domanda "Che cos'è la geometria?" si ottiene facilmente la risposta "La geometria studia le figure". Ma cosa significa studiare una figura?

Quando si fissa l'attenzione su una figura, si trascura sempre qualche sua caratteristica, che non ci sembra rilevante: di solito non ci interessa dove la figura sia rappresentata (alla lavagna o sul quaderno), di quale colore sia, spesso nemmeno con quale scala venga rappresentata. In altre parole, non ci interessano tutte le proprietà della figura, bensì solo quelle che restano invariate per certe trasformazioni: si fa quindi un ricorso implicito al concetto di trasformazione e di invariante.

Tornando ai sottogruppi del gruppo T, ne consideriamo alcuni, caratterizzati da alcune proprietà invarianti delle figure geometriche.

1. Il gruppo proiettivo P: una proiettività è una trasformazione che conserva l'allineamento dei punti, ovvero manda rette in rette (per i matematici: conserva anche il birapporto di 4 punti allineati e l'ordine di una curva algebrica). Per capirci meglio: una proiettività ha qualcosa a che fare con un cambiamento di prospettiva. Se una parete guardata frontalmente ha la forma di un rettangolo, guardata lateralmente ci sembra un trapezio: due lati del rettangolo, prima paralleli, sono ora convergenti. Qualcosa è cambiato, qualcosa no.

2. Il gruppo affine A (sottogruppo del gruppo proiettivo): un'affinità è una particolare proiettività che manda rette parallele in rette parallele, conserva il punto medio di un segmento, manda ellissi in ellissi, iperboli in iperboli, parabole in parabole ed è tale che il rapporto fra le aree di figure corrispondenti è costante (per i matematici: queste proprietà sono una conseguenza del fatto che un'affinità è una proiettività per cui la retta impropria è unita).

3. Il gruppo elementare o **simile S** (sottogruppo del gruppo affine): una similitudine è un'affinità che trasforma circonferenze in circonferenze, conserva gli angoli ed è tale che il rapporto fra segmenti corrispondenti è costante (per i matematici: una similitudine è un'affinità che fissa globalmente i punti ciclici).

4. Il gruppo delle isometrie o **congruenze** o **movimenti rigidi I** (sottogruppo del gruppo simile): un'isometria è una similitudine che conserva la distanza fra punti corrispondenti. Di conseguenza, un'isometria manda figure in figure congruenti, ovvero identiche, sovrapponibili con un movimento "rigido", che non deforma la figura nel corso del movimento.

Abbiamo quindi $I \subset S \subset A \subset P \subset T$, dove "$\subset$" rappresenta il simbolo d'inclusione insiemistica. Ci sono inoltre affinità, similitudini e isometrie che conservano *l'orientamento delle figure*: ad esempio, assegnato un poligono con i vertici numerati in senso orario, il poligono trasformato avrà ancora i vertici numerati in senso orario. Tali trasformazioni si dicono **dirette** e costituiscono dei sottogruppi $I' \subset S' \subset A'$ dei rispettivi gruppi $I \subset S \subset A$. Le trasformazioni che non conservano l'orientamento si dicono **inverse** e non costituiscono sottogruppi (infatti applicando consecutivamente due trasformazioni che non conservano l'ordinamento dei vertici si ottiene una trasformazione che invece lo conserva).

Veniamo al dunque: perché questa carrellata di gruppi di trasformazioni, ciascuno caratterizzato da proprietà invarianti delle figure che subiscono tali trasformazioni?

Un'osservazione preliminare: purtroppo è ancora molto naturale parlare al singolare, quando ci si riferisce alla matematica e alla geometria. Eppure, ad esempio, esiste un'Enciclopedia delle *matematiche* elementari e si conosce l'esistenza delle *geometrie* non euclidee. Forse non tutti sanno che, oltre alle geometrie non euclidee, esistono molte altre geometrie. Innanzitutto si possono variare le dimensioni dello spazio: la stessa geometria euclidea si distingue in geometria piana e solida. Se facciamo uno sforzo d'immaginazione possiamo pensare ad uno spazio euclideo con un *generico numero di dimensioni*. Si dà inoltre per scontato che lo spazio in cui consideriamo punti e figure sia uno spazio *continuo*: invece è possibile costruire delle geometrie in uno spazio *discreto*. Cerco di spiegarmi molto concretamente: chiunque da piccolo si sarà divertito a giocare con i "chiodini" e forse qualcuno ricorda delle tavolette con tanti chiodi disposti a reticolo e dotate di elastici colorati per formare disegni o figure. E' evidente che le caratteristiche delle figure costruite su questi supporti non sono le stesse delle figure euclidee. Infine sappiamo che le geometrie non euclidee nacquero dalla scoperta della possibilità di sostituire il famoso quinto postulato (relativo all'esistenza e unicità di una retta parallela passante per un punto esterno ad una retta data) con postulati che costituivano la sua negazione. Questo può accadere per altri postulati: c'è, ad esempio, il postulato di Archimede e ci sono geometrie archimedee o non archimedee. Se poi consideriamo che, fissato uno spazio come quello euclideo, è possibile decidere di studiare le proprietà delle figure a diversi livelli (è quello che fecero coloro che svilupparono la geometria proiettiva e quella affine) si arriva ad una molteplicità di geometrie non indifferente. Non è quindi più lecito parlare al singolare nel caso della geometria: significherebbe essere fermi al III sec a. C.!

Ma come fare a mettere un po' d'ordine fra tutte queste differenti geometrie? Ecco il concetto di gruppo venirci in aiuto...

Il matematico tedesco **Felix Klein** (1849-1925), che occupa un posto di rilievo nella storia della matematica per i suoi notevoli contributi in svariati settori (geometrie non euclidee, teoria dei gruppi, teoria delle funzioni algebriche, fisica e didattica) divenne professore all'Università di Erlangen nel 1872, a soli 23 anni. Scrisse per l'occasione una dissertazione inaugurale (che in realtà non fu il discorso effettivamente pronunciato in quell'occasione) dal titolo *"Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti"*: tale dissertazione contiene un'analisi metodologica così importante che la rese più semplicemente famosa come **"programma di Erlangen"**. Il merito di Klein fu quello di trovare un'idea unificatrice che permettesse una classificazione delle varie geometrie: molte apparivano "strane", si presentavano in maniera episodica ed erano staccate fra loro. *"[...] il pubblicare siffatte considerazioni comprensive appariva tanto più giustificato, in quanto che la geometria, che pur è unica nella sua sostanza, nel rapido sviluppo cui andò soggetta negli ultimi tempi si è troppo suddivisa in discipline quasi separate che vanno progredendo alquanto indipendentemente le une dalle altre"* (F.Klein).

Per fondare una geometria, secondo Klein occorrono:

1) **uno spazio S**, la cui struttura è definita da precisi assiomi;
2) **un gruppo di trasformazioni G**, anch'esso definito da determinate caratteristiche.

Quindi ***una geometria è lo studio delle figure dello spazio S aventi carattere invariante rispetto al gruppo di trasformazioni G,*** ovvero *"la teoria invariantiva relativa al gruppo medesimo"* (F.Klein).

Tale criterio di classificazione consente di stabilire delle chiare relazioni fra le diverse geometrie. Se si considera il medesimo spazio S (ad esempio il piano euclideo) si può stabilire una sorta di *subordinazione* o *gerarchia* fra le diverse geometrie che si possono costruire in esso. Chiamiamo **geometria proiettiva** quella che studia le proprietà delle figure invarianti per proiettività, **geometria affine** quella che studia le proprietà delle figure invarianti per affinità, **geometria elementare o simile** quella che studia le proprietà delle figure invarianti per similitudini ed infine **geometria metrica** quella che studia le proprietà delle figure invarianti per isometrie: la geometria euclidea (quella studiata nel biennio della scuola superiore e che riunisce la geometria metrica e quella simile) risulta essere un caso particolare di quella affine, a sua volta un caso particolare di quella proiettiva. Questo perchè esiste una precisa relazione d'inclusione fra i rispettivi gruppi di trasformazioni precedentemente descritti ($I \subset S \subset A \subset P$).

L'opera di Klein rappresenta il culmine dell'Età eroica della geometria: per mezzo secolo egli svolse ininterrottamente un'attività di insegnamento e di divulgazione. L'entusiasmo comunicato da Klein ai suoi allievi fu così contagioso che parecchi matematici di primo piano della fine del XIX secolo si lasciarono andare a fare la profezia che non solo la geometria, ma l'intera matematica, avrebbe finito con l'essere inglobata nella teoria dei gruppi."(C. B. Boyer)

2.3 LE ISOMETRIE E LA "TASSELLATURA REGOLARE" DEL PIANO

"L'architettura, la scultura e la pittura dipendono specificamente dallo spazio, legate come sono alla necessità di gestire lo spazio, ciascuna con le sue particolari tecniche. E' essenziale il fatto che la chiave dell'emozione estetica sia una funzione spaziale. [...] la precisone necessaria in tutti gli atti destinati a far scattare un'emozione di qualità è di ordine matematico" *(Le Corbusier).*

Non tutti potranno condividere quest'affermazione, ma personalmente sono sempre stata affascinata dall'armonia e dall'ordine che rivelano certe manifestazioni artistiche: dalle varie decorazioni ornamentali che riproducono motivi prettamente geometrici fino alle litografie di M.C. Escher e degli artisti che hanno seguito le sue orme. Anche diversi matematici, fra i quali Sir Roger Penrose, hanno esplorato il campo "artistico" dei motivi ornamentali, ricercando nuove possibilità e soluzioni quasi-simmetriche.

Perché un motivo geometrico ci può piacere più di un altro? Non si tratta solo del motivo in sé e dei colori usati, ma anche del *modo con cui esso è ripetuto* per ricoprire un tappeto, della carta da regalo, la stoffa di un vestito. Questo modo è legato a particolari sottogruppi del gruppo delle isometrie: a ciascuno di noi risulta più gradevole un determinato sottogruppo piuttosto che un altro. Probabilmente può stupire il fatto che il nostro senso estetico sia in parte legato alla predilezione per un sottogruppo, ma è proprio così...

Vediamo quindi più da vicino **il gruppo I delle isometrie del piano**. Spesso si fa un po' di confusione, anche a livello didattico, specialmente sui libri di testo. In realtà, avvalendosi del concetto di gruppo il discorso è semplice. Esistono solo quattro tipi distinti di isometrie. Le **traslazioni** e le **rotazioni** sono isometrie dirette e "generano" il sottogruppo I' costituito da tutte le isometrie dirette (i generatori di un gruppo sono quegli elementi del gruppo che opportunamente moltiplicati fra di loro danno un qualsiasi elemento del gruppo).

Le **simmetrie assiali** o **riflessioni** e le **glissosimmetrie** o **glissoriflessioni** sono i due possibili tipi di isometrie inverse. Tutti dovrebbero intuire cosa si intende per traslazione o rotazione, e forse anche per simmetria assiale (si fissa una retta e ad ogni punto P si associa il punto P' tale che il segmento PP' risulti perpendicolare alla retta ed intersechi la retta nel suo punto medio: se si effettua una simmetria assiale di una figura si ottiene una figura "speculare" rispetto alla retta assegnata), ma pochi dovrebbero aver sentito il termine "glissosimmetria": in realtà non è nulla di complicato. Tale trasformazione si ottiene dalla composizione di una simmetria assiale con una traslazione parallela all'asse: ad esempio, dato un asse verticale e una figura a sinistra di quest'asse si considera la sua immagine speculare a destra ma spostatata verso l'alto o verso il basso. Sui libri di testo si parla di simmetria centrale, ma talvolta non si mette in evidenza un fatto importante: una simmetria centrale non è altro che una rotazione di 180° rispetto al "centro" e come tale va classificata fra le isometrie dirette e non fra quelle inverse, come le simmetrie in senso stretto.

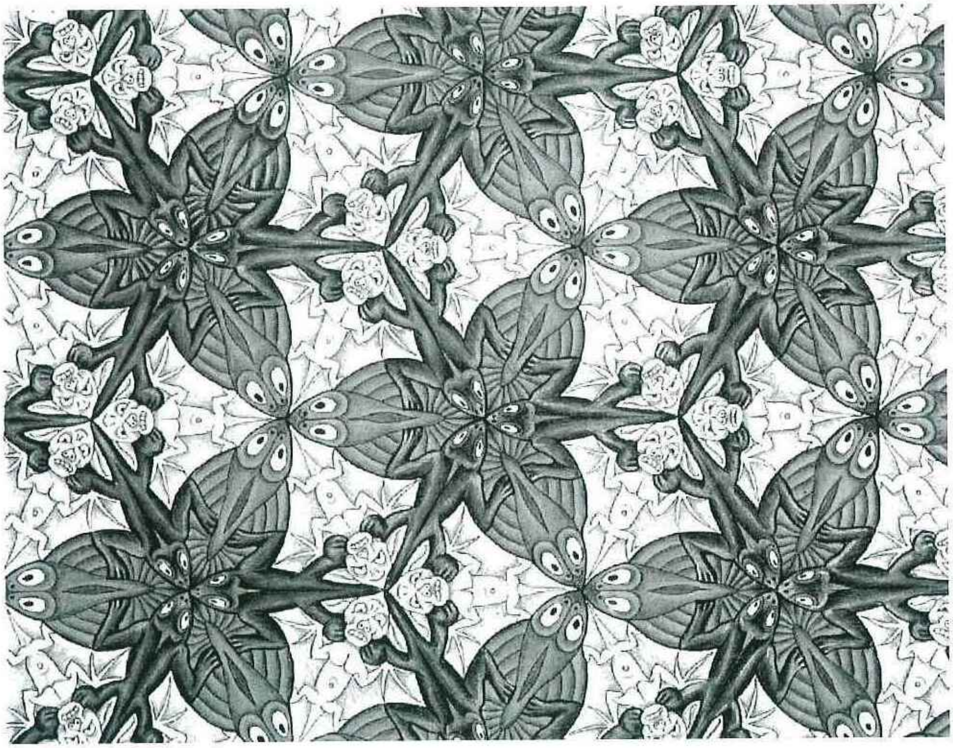
Soffermiamoci un attimo sulle simmetrie assiali, cercando di comprendere e giustificare la seguente affermazione: *le simmetrie assiali generano tutto il gruppo delle isometrie*. Se prendiamo <u>due rette parallele</u> ed eseguiamo successivamente le due simmetrie assiali corrispondenti, otteniamo una traslazione: la prima simmetria inverte l'orientamento della figura, ma la seconda lo ristabilisce. Se consideriamo invece <u>due rette incidenti</u> che s'incontrano in un punto O ed eseguiamo le due simmetrie assiali otteniamo un'isometria diretta che in tal caso è una rotazione di centro O. Infine se prendiamo <u>tre rette</u>, di cui due parallele e una perpendicolare a queste, otteniamo una glissosimmetria (la composizione delle prime due simmetrie ci da una traslazione e la terza una simmetria parallela alla traslazione). Si tratta di un inciso, per evidenziare che la **simmetria** svolge un ruolo privilegiato rispetto alle altre isometrie, poiché le simmetrie sono i "mattoni" con i quali è possibile costruire una qualsiasi isometria.

Analizziamo quindi la *struttura di un motivo ornamentale*: un piano viene suddiviso in un reticolo, le cui maglie, tutte fra loro identiche, possono essere quadrati, rettangoli, parallelogrammi, rombi od esagoni (non posso costruire un reticolo a maglie pentagonali: provare per credere...). In ciascuna di queste maglie posso disegnare un motivo. Facciamo un esempio: dividiamo il piano in parallelogrammi (di lati A e B) e in ciascuno di essi disegniamo una casetta a sinistra e un alberello a destra. Esistono due isometrie del piano che "mutano in sé" questa decorazione, ovvero che sovrappongono a se stessa tale decorazione: le due traslazioni parallele ai lati del parallelogramma di "lunghezze" A e B. Anche tutte le traslazioni di lunghezze multiple di A e B mutano in sé il motivo. Non abbiamo quindi singole traslazioni, ma un sottogruppo del gruppo delle isometrie "generato" da due traslazioni, il più semplice dei *"wallpaper groups"*, denominato *p1*, secondo la notazione adottata dall'Unione Internazionale di Cristallografia nel 1952. Possiamo pensare a motivi un po' più originali e regolari e allora avremo gruppi generati da traslazioni, rotazioni (di mezzo, un terzo, un quarto o un sesto di angolo giro), simmetrie o glissosimmetrie. In tutto, i cosiddetti **"gruppi cristallografici"** del piano, particolari sottogruppi del gruppo delle isometrie che mutano in sé un motivo ornamentale regolare che ricopre il piano, sono esattamente **17**: non uno di più, non uno di meno (*p1, p2, pm, pmm, pg, pgg, pmg, cm, cmm, p4, p4m, p4g, p3, p3m1, p31m, p6, p6m*). Occorre conoscerli o scoprirli per affrontare artisticamente in maniera sistematica il problema della **"tassellatura regolare"** del piano. Se poi pensiamo ad un decoro geometrico che riempie lo spazio (come la struttura di un cristallo), otteniamo **32** gruppi cristallografici, usualmente suddivisi in sette sistemi cristallini.

Risulta evidente, a questo punto, uno stretto rapporto fra ordinata complessità e bellezza: la matematica delle strutture astratte si avvicina all'arte e si può assaporare l'aspetto "contemplativo" della matematica. *"La tradizione matematica speculativa egiziana, a cui doveva in seguito ricollegarsi quella greca, risale alla 18° dinastia, cioè al 15 secolo a. C. Essa si manifestò particolarmente negli splendidi e svariatissimi ornamenti che arricchiscono le tombe dei faraoni, specie quelle di Tebe. E' stato rilevato che è in pratica difficilissimo, o quasi impossibile, trovare una decorazione che sia stata originata indipendentemente e che non sia stata copiata da quelle egiziane. Ciò è dovuto al fatto che i gruppi finiti di congruenze in un piano euclideo, che mutano in sé un reti-*

colo a maglie ricoprente il piano, sono in tutto precisamente 17. Nel piano si hanno quindi soltanto 17 specie di simmetrie di tipo cristallografico, che erano già tutte implicitamente note agli egiziani" (B. Segre). Gli arabi arricchirono le decorazioni disponendo sul piano figure poligonali opportunamente intrecciate e colorate in modo da rendere così palesi i sottogruppi. Infine, il matematico Bruno Ernst afferma, riferendosi all'artista olandese **Maurits Cornelius Escher**: *"Lo sviluppo di questo tema* (la struttura del piano) *comincia con l'interesse per la divisione regolare del piano, indotta in Escher in modo particolare dalle visite all'Alhambra* (in particolare quella del 1936). *Dopo uno studio intenso, che gli costò molta fatica, non essendo Escher un matematico, egli elaborò un complesso sistema per la suddivisione regolare del piano, sistema che avrebbe più tardi suscitato la meraviglia di cristallografi e matematici"*. Escher stesso evidenzia la novità della sua opera rispetto a quella degli artisti arabi: *"I mori erano maestri proprio nel riempire completamente superfici con un motivo sempre uguale. [...] peccato che l'Islam vietasse di realizzare disegni con figure. Nei loro mosaici si limitarono a comporre forme geometriche astratte. Nessun artista mauro, per quanto ne sappia, ha mai osato utilizzare [...] figure concrete e riconoscibili, per esempio uccelli, rettili, o esseri umani. Questa limitazione è per me incomprensibile, perché la riconoscibilità delle componenti dei miei stessi motivi ornamentali è la ragione del mio interesse, mai interrotto, in questo campo"*. Molti artisti, come Hans Kuiper, o matematici con interessi artistici seguirono Escher: ad esempio, **Sir Roger Penrose**, professore presso l'Università di Oxford, insignito del premio Wolf per la fisica (condiviso con Stephen Hawking nel 1988), si è dedicato al problema di ricoprire il piano con motivi che non si ripetono esattamente, ovvero quasi-periodici. Lo studio dei *ricoprimenti quasi-simmetrici* sembrò inizialmente soltanto matematica ricreativa (si può acquistare dall'America un gioco basato su un puzzle di Penrose, chiamato *Pentaplex*): come spesso accade, si scoprì invece che alcune sostanze chimiche formano cristalli in maniera quasi-periodica. E la ricerca continua...

Paola Zucca



M. C. Escher, Simmetria E85 (gruppo p3m1)

Bibliografia

C. F. Manara – G. Lucchini, "Momenti del pensiero matematico", Mursia.
C. B. Boyer, "Storia della matematica", Mondatori.
B. Segre, "La simmetria e la scienza", Le Scienze n.14, ottobre 1969.
B. Ernst, "Lo specchio magico di M. C. Escher", Taschen.
Sito completo sull'opera di M. C. Escher:
http://www.mcescher.com/indexuk.html
Sito completo su ricoprimenti periodici e aperiodici del piano, con esempi di motivi ornamentali tratti da ogni cultura (a partire dalle decorazioni egiziane): http://www.spsu.edu/math/tile/index.htm
Informazioni e links su Sir Roger Penrose: http://www.worldofescher.com/misc/penrose.html e http://www.wikipedia.org/wiki/Roger_Penrose
Sito su Hans Kuiper: http://web.inter.nl.net/hcc/Hans.Kuiper
Per acquistare puzzles, posters, rompicapi e varie "combinazioni creative di matematica, arte e divertimento":
http://members.cox.net/tessellations/index.html